В.И.Рыжик

ОБ УГЛАХ МЕЖДУ СКРЕЩИВАЮЩИМИСЯ ПРЯМЫМИ И НЕМНОГО О ПРОЧИХ УГЛАХ

Окончание. Начало см. в № 3 за 2008 г.

Задачи на вычисление угла между скрещивающимися прямыми

Ясно, что установление перпендикулярности прямых можно рассматривать как частный случай задачи на вычисление угла между прямыми: мы просто проверяем, будет ли найденный угол равен 90°. Тут же замечу, что вычисление угла равносильно вычислению какой-либо тригонометрической функции угла, чаще всего косинуса.

Существуют разные способы нахождения угла между скрещивающимися прямыми. И не всегда эта задача столь легка, чтобы можно было обойтись только одним из них.

Вообще старайтесь решать задачу разными способами: чем больше вы их найдете, тем лучше. Такими поисками занимаются и профессиональные математики — всегда хочется найти более короткое, более красивое решение, наконец, такое, которое понравится больше всего. Во-первых, такая деятельность означает проверку, причем самую качественную. Во-вторых, она способствует лучшему пониманию геометрии в целом: чем больше выявлено связей между геометрическими фактами, тем глубже их понимание. В-третьих, поиск разных способов решения одной и той же задачи развивает важное качество ума, которое психологи называют гибкостью.

Вернемся к задаче на вычисление угла между скрещивающимися прямыми. Как ее можно решить?

П е р в ы й с п о с о б — с помощью *параллельного переноса*. Напомню, в чем его суть: мы производим перенос одной из скрещивающихся прямых (или сразу двух) так, чтобы прямые, полученные в результате этого преобразования, пересекались. Тем самым исходная задача сводится к нахождению угла между двумя прямыми на плоскости. Хорошей иллюстрацией данного способа служит решение задачи 2 (см. первую часть статьи в № 3 за 2008 г.).

Решите указанным способом задачи 10 и 11.

Задача 10. Вычислите угол между прямыми RH и MF (рис. 1).

Задача 11. Вычислите угол между прямыми RN и SL (рис. 2).

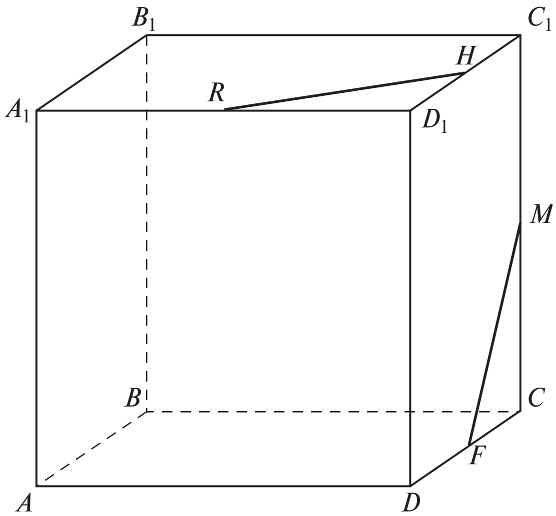

Рис. 1

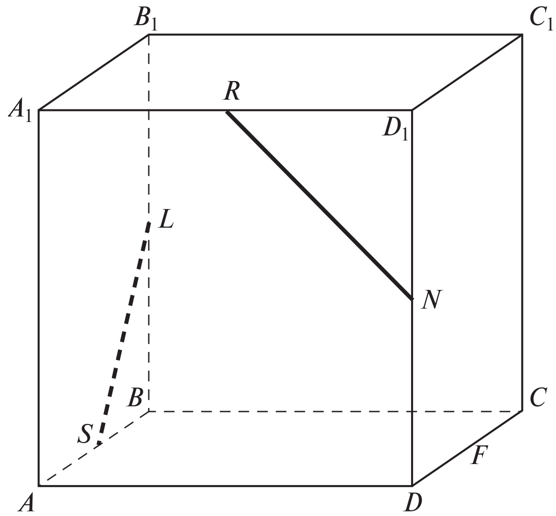

Рис. 2

В т о р о й с п о с о б — *«в три косинуса»* — таков. Пусть p и q — данные скрещивающиеся прямые. Проведем через прямую q плоскость α, пересекающую прямую p. Спроектируем прямую p на плоскость α и назовем ее проекцию p_1 (рис. 3). Тогда верна формула

$$\cos\angle pq = \cos\angle pp_1 \cdot \cos p_1 q. \qquad (1)$$

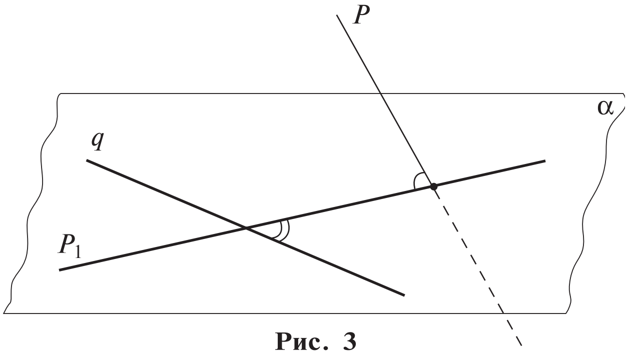

Рис. 3

Попробуйте вывести эту формулу самостоятельно; для начала рассмотрите случай, когда прямые p, q, p_1 имеют общую точку **[?]**. (Для знатоков: формула (1) является следствием теоремы косинусов для трехгранного угла, когда соответствующий двугранный угол — прямой.)

Решим этим способом задачу 2А. (В этой задаче из первой части статьи требуется выяснить, перпендикулярны ли прямые CD_1 и BC_1, проведенные через вершины единичного куба $A...D_1$.)

Чтобы найти угол между прямыми CD_1 и BC_1, спроектируем CD_1 на плоскость грани BCC_1B_1; проекцией будет прямая CC_1 (рис. 4) Дальше — только вычисления по формуле (1):

$$\cos\angle CD_1,\ BC_1 = (\cos\angle CD_1,\ CC_1)\cdot\cos\angle CC_1,\ BC_1.$$

Искомый угол равен 60° **[?]**, прямые CD_1 и BC_1 не перпендикулярны.

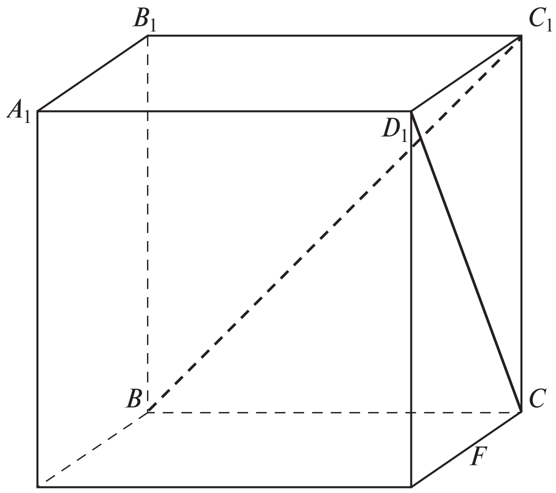

Рис. 4

Решите этим же способом задачу 12.

Задача 12. Вычислите угол между прямыми CA_1 и AV (рис. 5). (*Подсказка*. Спроектируйте прямую A_1C на плоскость AB_1C_1.)

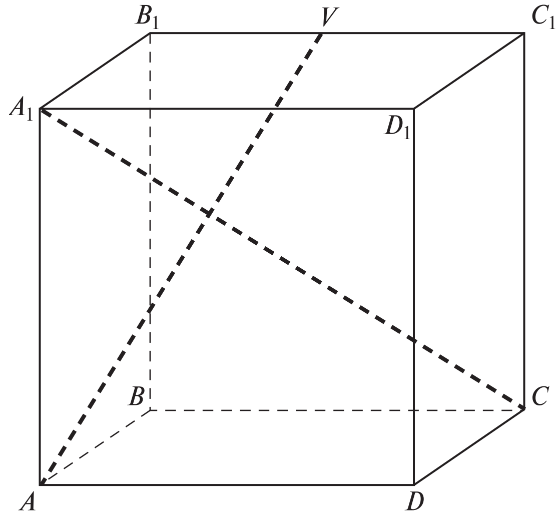

Рис. 5

Третий способ — *проектирование обеих скрещивающихся прямых* на плоскость, перпендикулярную одной из них. Пусть p и q — скрещивающиеся прямые, плоскость α перпендикулярна прямой p, прямая q пересекает α в точке B, точка A — проекция прямой p, а прямая q_1 — проекция прямой q; на прямой q лежит отрезок длиной d, а его проекция на плоскость α имеет длину d_1 (рис. 6). Тогда верна формула

$$d_1 = d\sin\varphi, \qquad (2)$$

где φ — угол между прямыми p и q.

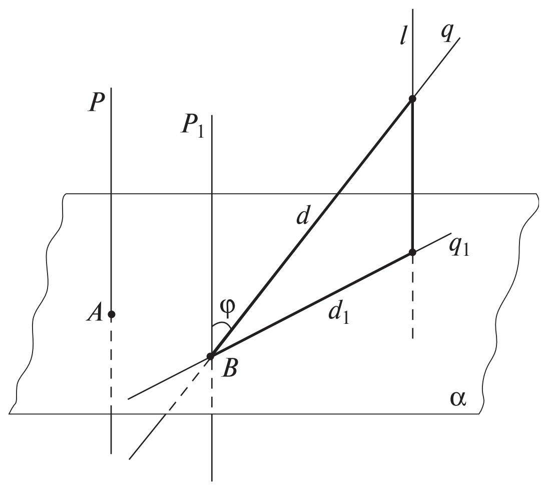

Рис. 6

Для ее доказательства проведем через точку B прямую p_1, перпендикулярную плоскости α. Так как прямые p_1 и l параллельны (см. рис. 6) **[?]**, то они лежат в одной плоскости. Теперь для обоснования формулы (2) достаточно знаний из курса планиметрии. Закончите доказательство самостоятельно.

Решим данным способом задачу 2. (В этой задаче из первой части статьи требуется выяснить, перпендикулярны ли прямые DA_1 и CD_1, проведенные через вершины единичного куба $A...D_1$.)

Проведем плоскость C_1DA. Она перпендикулярна прямой CD_1 **[?]**, поэтому проекцией прямой CD_1 на эту плоскость будет точка P, а проекцией прямой DA_1 — прямая DQ **[?]** (рис. 7). Остается вычислить отношение длины отрезка DQ к длине отрезка DA_1 и сравнить полученное число с 1. Доведите вычисления до конца.

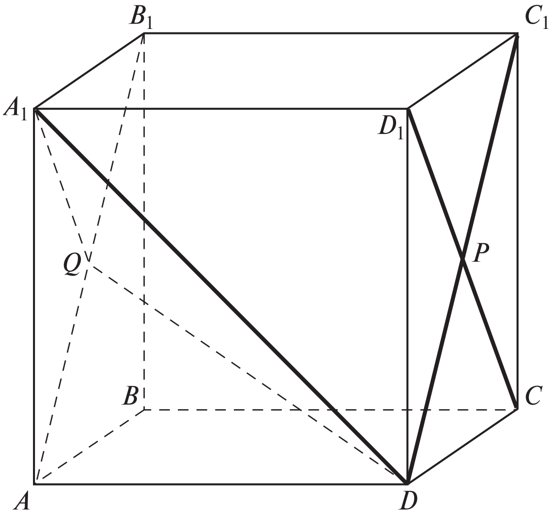

Рис. 7

Решите аналогичным образом задачу 2А.

Четвертый способ — *проектирование отрезка одной из скрещивающихся прямых на другую* основывается на следующем свойстве ортогонального проектирования на прямую. Пусть p и q — скрещивающиеся прямые, на прямой p находится отрезок длиной a, и его ортогональной проекцией на прямую q является отрезок длиной b. Тогда верна формула

$$b = a\cos\varphi, \qquad (3)$$

где φ — угол между прямыми p и q (рис. 8).

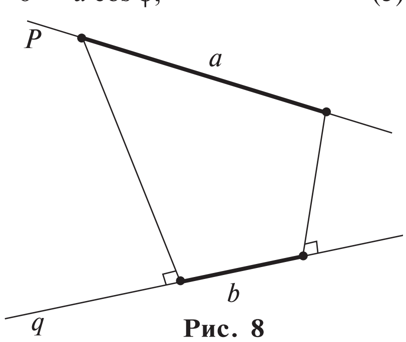

Рис. 8

Подсказка для доказательства формулы (3): сначала проведите через одну из данных прямых плоскость, пересекающую другую прямую, затем замените проектирование отрезка на прямую последовательным проектированием его сначала на проведенную плоскость, а затем — проектированием (в этой плоскости) полученной проекции на вторую прямую (рис. 9), после чего останется применить формулу «трех косинусов».

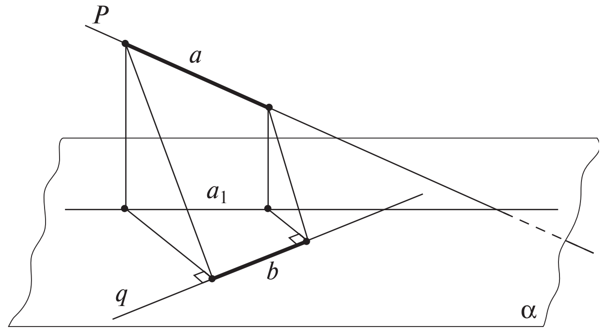

Рис. 9

Для другого, по-моему, более симпатичного способа доказательства используем векторы. Пусть $AB = a$ — отрезок прямой p, а $CD = b$ — его проекция на прямую q. Запишем равенство $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB}$ **[?]**. Заметим, что в силу ортогонального проектирования на прямую векторы $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{CD}$, равно как и векторы $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{DB}$, ортогональны, посему соответствующие скалярные произведения равны 0. Теперь простая выкладка:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB} \Rightarrow \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB})\cdot\overrightarrow{CD} =$$
$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{CD} \Rightarrow ab\cos\varphi = b^2 \Rightarrow b = a\cos\varphi.$$

Применим рассмотренный способ при решении задачи 2.

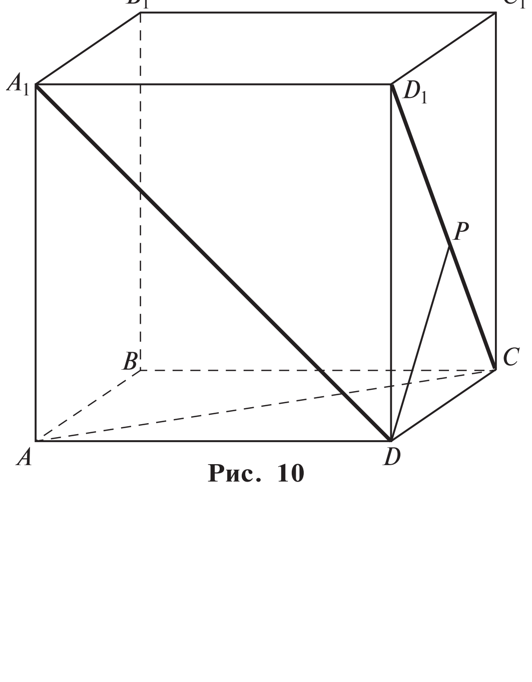

Рис. 10

Для нахождения угла между прямыми DA_1 и CD_1 спроектируем диагональ DA_1 на прямую CD_1. Ее проекцией будет отрезок PD_1 **[?]** (рис. 10). Косинус нужного нам угла равен отношению PD_1 к DA_1, т.е. $\frac{1}{2}$. Отсюда и получаем угол 60°.

Примените этот же способ в задаче 13.

Задача 13. Вычислите угол между прямыми A_1P и DB_1 (рис. 11). (*Подсказка*. Спроектируйте отрезок A_1P на прямую DB_1.)

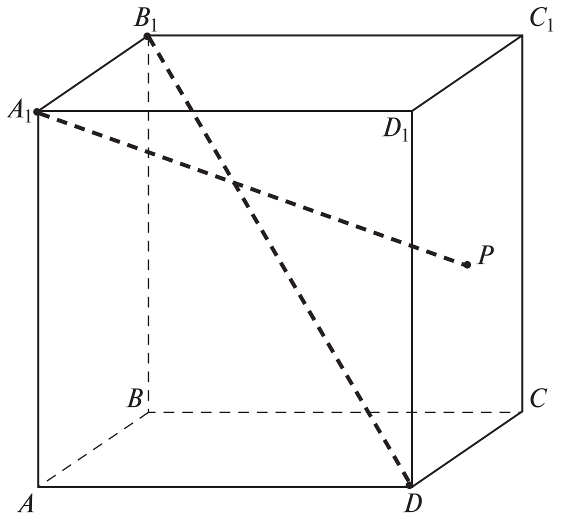

Рис. 11

Коль скоро в решении данным способом возникают длины отрезков, становится возможным введение вспомогательного линейного параметра. Как этим воспользоваться, покажу на таком примере.

Задача 14. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны углы α и β, которые составляют с плоскостью основания $ABCD$ скрещивающиеся диагонали DA_1 и CD_1 смежных боковых граней (рис. 12). Вычислите угол между этими диагоналями.

Спроектируем диагональ DA_1 на прямую CD_1. В результате на грани CDD_1C_1 появится отрезок KD_1 (проекция DA_1), причем точка K будет лежать на диагонали CD_1 **[?]** (рис. 12). Для нахождения угла между прямыми DA_1 и CD_1 требуется найти отношение KD_1 к DA_1. Его найти несложно, по сути — это задача из планиметрии.

Пусть $DD_1 = 1$, тогда $A_1D = \dfrac{1}{\sin\alpha}$, $KD_1 = \sin\beta$ **[?]**. Отсюда и получаем для угла φ между прямыми DA_1 и CD_1:

$$\cos\varphi = \sin\alpha\sin\beta.$$

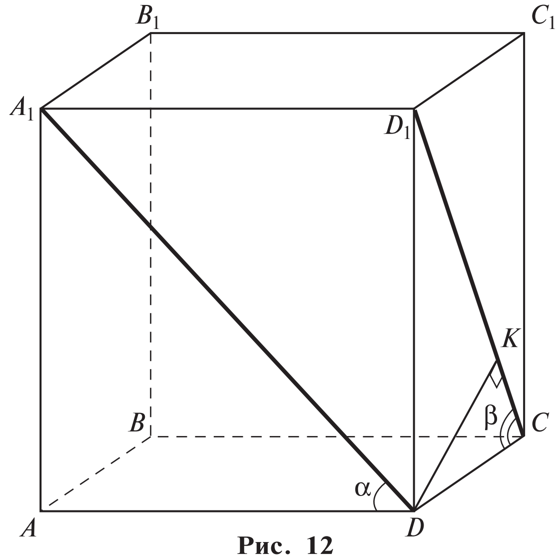

Рис. 12

Решите описанным способом задачу 14А.

Задача 14А. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны углы α и β, которые составляют с плоскостью грани CDD_1C_1 скрещивающиеся диагонали A_1D и B_1D_1 (рис. 13). Вычислите угол между этими диагоналями.

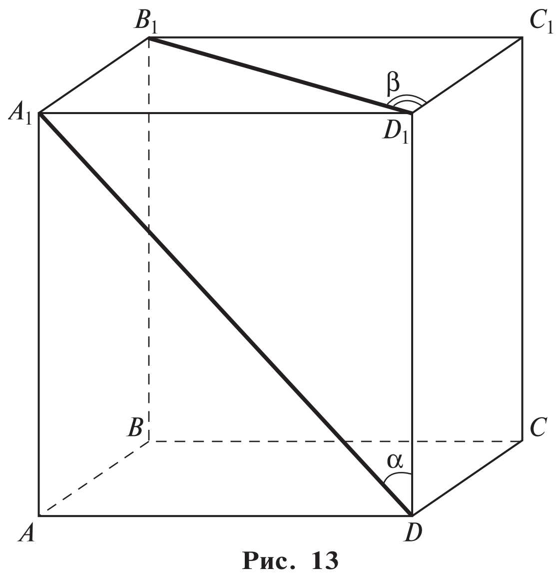

Рис. 13

П я т ы й   с п о с о б вычисления угла между скрещивающимися прямыми — *векторный*, в нем используется скалярное умножение, а именно формула

$$\cos\angle\vec{a}\vec{b} = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}.$$

Данный способ можно применить в двух вариантах: используя координаты или обойдясь без них. Проиллюстрируем его на примере решения задачи 2.

Для нахождения угла между прямыми A_1D и D_1C в бескоординатном варианте проделаем следующее. Представим вектор $\overrightarrow{A_1D}$ как сумму векторов $\overrightarrow{A_1A}$ и $\overrightarrow{AD}$, а вектор $\overrightarrow{D_1C}$ как сумму векторов $\overrightarrow{D_1D}$ и $\overrightarrow{DC}$ (рис. 14).

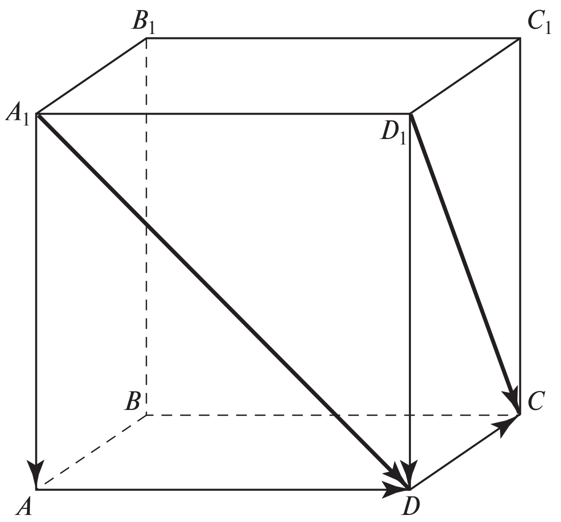

Рис. 14

Затем, считая куб единичным, найдем скалярное произведение векторов $\overrightarrow{A_1D}$ и $\overrightarrow{D_1C}$: оно равно 1 **[?]**. И наконец, разделим полученный результат на произведение длин этих векторов (а длина каждого равна $\sqrt{2}$). В итоге получим косинус угла между векторами $\overrightarrow{A_1D}$ и $\overrightarrow{D_1C}$, равный $\frac{1}{2}$, и сам угол — 60°.

В координатном варианте эта же идея выглядит так. Пусть начало координат находится в точке A, а оси x, y, z направлены по лучам AD, AB, AA_1 соответственно. Найдем координаты векторов $\overrightarrow{A_1D}$ и $\overrightarrow{D_1C}$ (рис. 15).

Вектор $\overrightarrow{A_1D}$ имеет координаты $(1; 0; -1)$, а вектор $\overrightarrow{D_1C}$ — координаты $(0; 1; -1)$ **[?]**. В результате их скалярного перемножения получаем 1. Дальнейшие вычисления такие же, как и в первом варианте решения.

Замечание. Если бы один из взятых векторов ($\overrightarrow{A_1D}$ или $\overrightarrow{D_1C}$) мы заменили на противоположный, получили бы угол между векторами, равный 120°. Однако угол между прямыми не бывает тупым по определению, вместо найденного тупого угла надо брать угол, смежный с ним, т.е. опять же 60°. Изначально не всегда понятно, какие именно векторы выбрать на данных прямых, поэтому можно взять любую их комбинацию, сделав при необходимости нужную поправку на «нетупость» искомого угла.

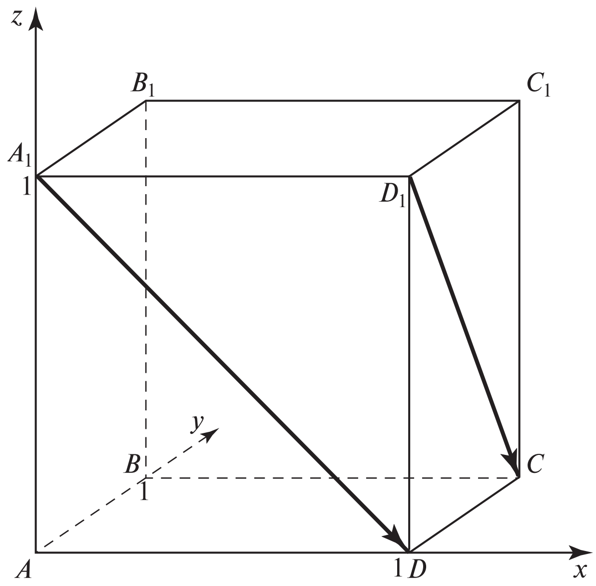

Рис. 15

Примените этот способ (в обоих вариантах) при решении следующей задачи.

Задача 15. Вычислите угол между прямыми B_1P и DO_1 (рис. 16).

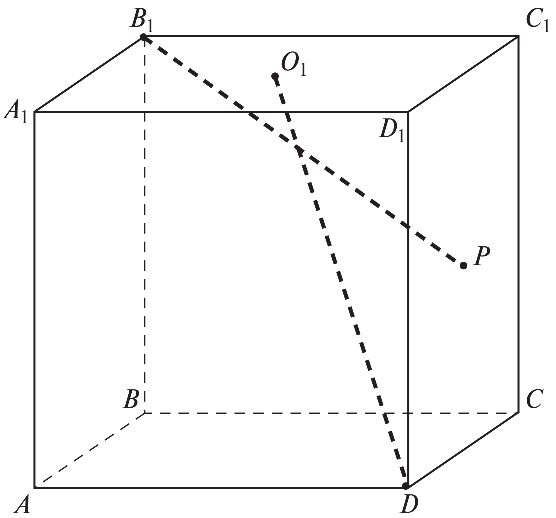

Рис. 16

Шестой способ определения угла между скрещивающимися прямыми — *«с помощью за-*

мкнутой ломаной» также основан на векторной технике. Пусть у нас есть замкнутая ломаная $ABCDA$ (неважно — плоская она или неплоская, могут быть и самопересечения). Тогда выполняется равенство **[?]**

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}.$$

Далее можно идти двумя путями.

Возведя обе части этого равенства в квадрат, заменив затем скалярные квадраты векторов на квадраты их длин, а скалярные произведения раскрыв по определению, придем к равенству

$$AD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + 2AB\cdot BC\cos\alpha + 2BC\cdot CD\cos\beta + 2AB\cdot CD\cos\varphi,$$

где α, β, φ — углы между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ соответственно.

Если в этой формуле нам известны длины всех отрезков, а также углы α и β, то несложно вычислить и угол φ между прямыми AB и CD, которые в интересующем нас случае являются скрещивающимися.

Можно сделать чуть иначе. Пусть нас по-прежнему интересует угол между прямыми AB и CD. Запишем такое равенство **[?]**:

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}.$$

Умножим обе его части на вектор $\overrightarrow{DC}$. Проделав выкладки, аналогичные указанным выше, придем к равенству

$$2AB\cdot DC\cos\varphi = 2AD\cdot DC\cos\alpha + DC^2 + 2CB\cdot DC\cos\beta,$$

При наличии необходимых данных находим искомый угол.

Замечание. Обращаю внимание на то, что углы α, β, ц в двух получившихся равенствах различны; необходимо также помнить, что угол между прямыми и угол между направляющими векторами этих прямых могут быть как равными, так и дополнять друг друга до 180°.

Решите этим способом (рассмотрев оба варианта решения) задачу 2.

С е д ь м о й с п о с о б вычисления угла между скрещивающимися прямыми — «*с помощью тетраэдра*» встречается нечасто, но он весьма эффективен. Для тетраэдра $ABCD$ верна формула

$$\cos\angle AC, BD=\frac{|(AD^2+BC^2)-(AB^2+CD^2)|}{2AC\cdot BD}. \qquad (4)$$

Доказательство проведем векторным способом, используя скалярное умножение векторов. Выберем полюс O и запишем каждый нужный нам вектор как разность векторов с началом в точке O (рис. 17):

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB},$$
$$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OB},\ \overrightarrow{AD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{CD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC}.$$

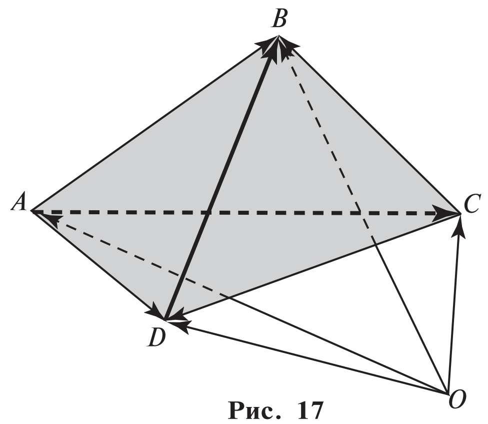

Рис. 17

Докажем равенство

$$2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=|(\overrightarrow{AD}^2+\overrightarrow{BC}^2)-(\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{CD}^2)|,$$

из которого и следует формула (4) **[?]**.

Для удобства введем обозначения:

$$\overrightarrow{OA}=a,\ \overrightarrow{OB}=b,\ \overrightarrow{OC}=c,\ \overrightarrow{OD}=d.$$

Итак, требуется доказать тождество

$$2(c-a)(d-b) = |(d-a)^2+(c-b)^2-(b-a)^2-(d-c)^2|.$$

Это сделать несложно **[?]**.

Замечание. В данном способе вычисление угла между прямыми требует знания шести расстояний между четырьмя точками, лежащими по две на каждой из этих прямых. Иными словами, надо знать длины шести отрезков, расположенных определенным образом. Удобно представлять эти отрезки как ребра тетраэдра, из коих четыре – как противоположные звенья замкнутой ломаной и еще два — как ее «диагонали». В нашем случае $ABCDA$ — замкнутая ломаная, AC и BD — ее «диагонали».

Для произвольного тетраэдра последовательные звенья замкнутой ломаной обозначим буквами a_1, a_2, a_3, a_4, а ее «диагонали» — буквами d_1 и d_2, тогда нужная нам формула запишется более компактно:

$$\cos\angle d_1, d_2=\frac{|(a_1^2+a_3^2)-(a_2^2+a_4^2)|}{2d_1d_2}. \qquad (5)$$

Решим этим способом задачу 2.

Для нахождения угла между прямыми DA_1 и CD_1 рассмотрим тетраэдр A_1CDD_1 (рис. 18). Подставим длины его ребер (считая куб единичным) в формулу (5) и придем, разумеется, к тому же ответу, что и раньше.

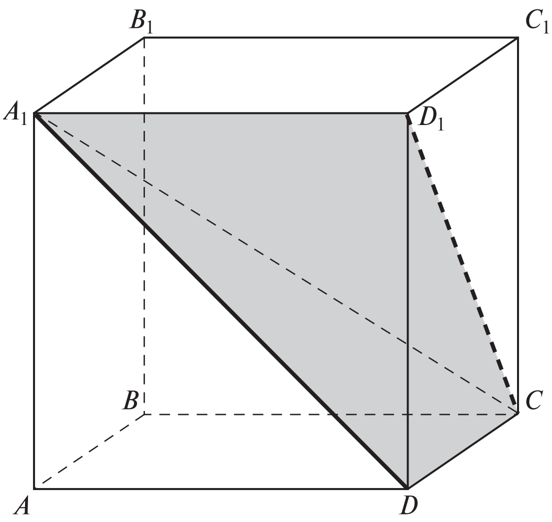

Рис. 18

Примените описанный способ в задаче 16.

Задача 16. Вычислить угол между прямыми C_1D и KG (рис. 19).

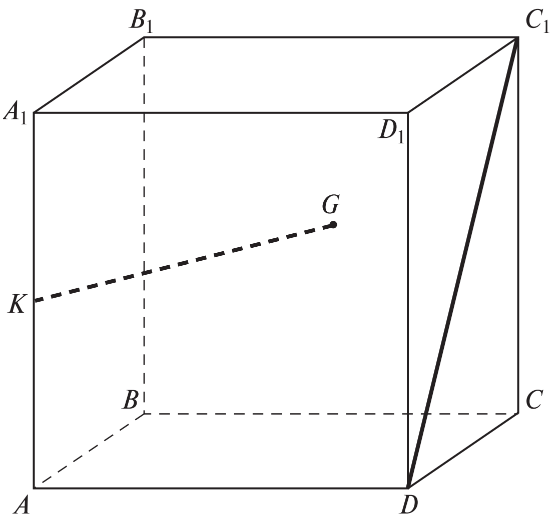

Рис. 19

Когда мы имеем дело с формулой, есть возможность «поиграть» с ней, например получить какие-нибудь ее следствия. Попробуем это сделать с формулой (5). Вот несколько возможностей.

1. Пусть в этой формуле какое-то a_i равно нулю, например a_4. Мы приходим к такому равенству **[?]**

$$\cos\angle d_1, d_2 = \frac{|(a_1^2 + a_3^2) - a_2^2|}{2a_1a_2}.$$

А оно есть не что иное, как теорема косинусов для треугольника, только чуть измененная из-за модуля. Но он здесь по делу: в планиметрии мы искали угол между лучами, а здесь — угол между прямыми **[?]**. Значит, формулу (5) позволительно считать обобщением теоремы косинусов, известной из планиметрии. Любопытно, не правда ли?

Какие еще результаты мы можем получить как следствия формулы (5), если:

2. $a_1 = a_2$;
3. $a_1^2 + a_3^2 = a_2^2 + a_4^2$;
4. $d_1 > 0$;
5. $d_1 > \infty$?

В каждом случае попытайтесь понять, каковы особенности получающейся фигуры.

Вы и сами можете поискать следствия из формулы (5) — возможно, удивите одноклассников или даже учителя. Можно поработать с этой формулой и чисто алгебраически, позабыв на время, что за ней скрывается косинус угла в тетраэдре. Например, пытаясь доказать, что (для ребер тетраэдра) модуль выражения в правой части не превосходит 1. А чтобы упростить задачу, положите, к примеру, $d_1 = d_2 = 1$.

И еще. Вы заметили, что в доказательстве формулы (5) никак не использовался тот факт, что все описанное происходит в пространстве? Безразличие к размерности — одна из особенностей векторного метода. Но тогда равенство верно и на плоскости. И что же оно в таком случае означает?

Восьмой способ нахождения угла между скрещивающимися прямыми предполагает предварительное *вычисление расстояния между ними* и используется крайне редко. В данном способе используется формула

$$6V = a\,b\,h\sin\varphi, \qquad (6)$$

где a и b — длины двух отрезков, являющихся противоположными ребрами тетраэдра, h — расстояние между прямыми, на которых лежат эти отрезки, φ — угол между этими прямыми, а V — объем тетраэдра.

Решим данным способом задачу 2.

Для нахождения угла между прямыми DA_1 и CD_1 рассмотрим тетраэдр A_1DCD_1 с вершиной A_1 и основанием DCD_1 (см. рис. 18). Его объем (в единичном кубе) равен $\frac{1}{6}$ **[?]**, ребра DA_1 и CD_1 имеют длину $\sqrt{2}$, расстояние между прямыми DA_1 и CD_1 равно $\frac{\sqrt{3}}{3}$ — трети диагонали куба **[?]**. Отсюда получаем равенство $1 = \sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\sin\varphi$, из которого и следует, что $\varphi = 60^\circ$.

Примените этот способ при решении задачи 17.

Задача 17. Вычислите угол между прямыми AG и VU (рис. 20). (*Подсказка*. Рассмотрите сечения куба параллельными плоскостями, проведенными через укзанные прямые. Одно сечение — равносторонний треугольник, другое — правильный шестиугольник.)

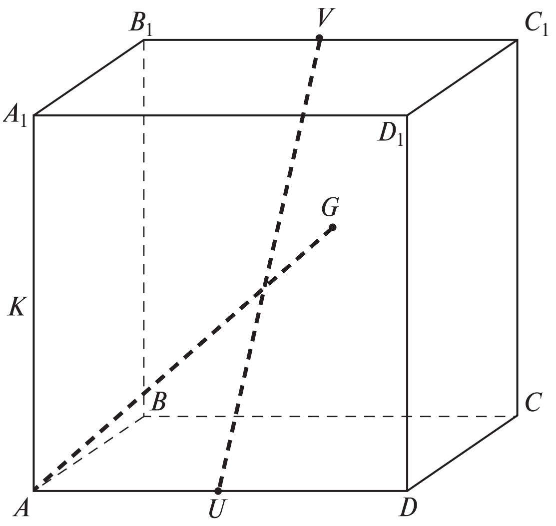

Рис. 20

Формула (6) замечательна тем, что в нее входят две основные величины, характеризующие расположение скрещивающихся прямых: расстояние, а также угол между ними. Тем самым угол между скрещивающимися прямыми помогает найти расстояние между ними. Вот пример тому.

Задача 18. Вычислите расстояние между скрещивающимися прямыми, на которых лежат диагонали соседних граней прямоугольного параллелепипеда, измерения которого равны a, b, c.

Эта задача требует разве что аккуратности в выкладках, но ответ выглядит симпатично:

$$h=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}}.$$

Что особо любопытно, так это полное совпадение результата с формулой высоты прямоугольного тетраэдра, проведенной из вершины, при которой все плоские углы прямые (a, b, c — ребра тетраэдра, выходящие из указанной вершины). Вы можете объяснить такое совпадение? (*Подсказка*. Рассмотрите прямоугольный тетраэдр как часть прямоугольного параллелепипеда.)

Однако сходу непонятно, как такая странная формула появилась, причем тут объем? Есть простое объяснение. Произведение $0{,}5\,ab\sin\varphi$ — не что иное, как площадь параллелограмма с диагоналями a, b и углом φ между ними. Если такой параллелограмм переместить с помощью параллельного переноса на высоту h, то получится параллелепипед именно с этими параметрами и объемом как раз $0{,}5\,abh\sin\varphi$. А коэффициент $\frac{1}{6}$ даст нам объем соответствующего тетраэдра. Осталось только понять, почему именно $\frac{1}{6}$, но это вы додумайте сами.

И еще. Из формулы (6) даром получается такой, вообще говоря, неочевидный результат: если по двум заданным скрещивающимся прямым движутся два отрезка фиксированной длины, то объем тетраэдра с вершинами в концах отрезков не изменяется **[?]**.

Девятый способ вычисления угла между скрещивающимися прямыми состоит в использовании *направляющих косинусов*. Пусть три прямые a, b, c попарно перпендикулярны, а прямая l образует с ними углы α, β, γ соответственно, тогда верна формула

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1. \qquad (7)$$

Косинусы углов α, β и γ называют направляющими косинусами прямой l.

Выведите формулу (7) самостоятельно (это несложно; для начала считайте, что все прямые имеют общую точку).

Зная только два из указанных углов, можно найти третий. Как вы понимаете, совсем не обязательно, чтобы все прямые пересекались, а потому по формуле (7) можно вычислить угол между скрещивающимися прямыми.

Примените этот способ в задаче 19.

Задача 19. Вычислите угол между прямой DX и прямой AO_1, где точка X — середина отрезка CO_1 (рис. 21). (*Подсказка*. Рассмотрите пирамиду O_1ADC. Три попарно перпендикулярные прямые – это AC, OD, OO_1. Считайте куб единичным. Сначала найдите углы между прямой DX и каждой из прямых OD и AC.)

Десятый способ нахождения угла между скрещивающимися прямыми — *координатный*. Его естественно применять, когда прямые заданы уравнениями в системе координат. По сути дела этот способ векторный, координатный он только по форме.

Уравнение прямой в координатной форме выглядит так:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}. \qquad (8)$$

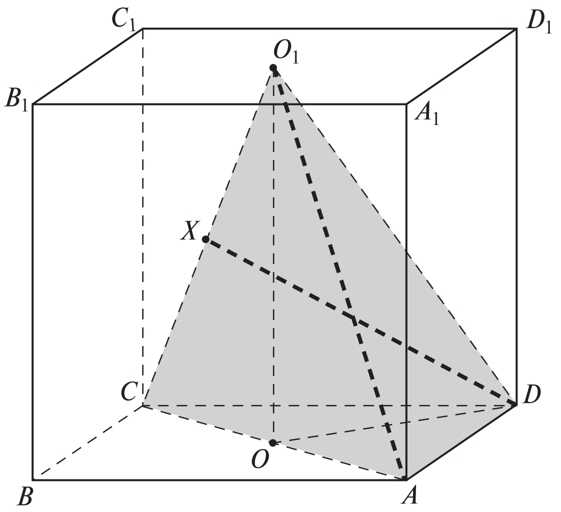

Рис. 21

Здесь $(x;\ y;\ z)$ — координаты переменной точки прямой, $(x_0;\ y_0;\ z_0)$ — координаты фиксированной точки прямой, $(m;\ n;\ p)$ — координаты направляющего вектора прямой (ненулевого вектора, параллельного прямой или лежащего на ней).

Замечание. Аналогичное уравнение можно записать и для прямой на плоскости; оно будет содержать вместо трех дробей — две (не будет третьей дроби).

Пусть прямая a задана уравнением

$$\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1},$$

где $(x_1;\ y_1;\ z_1)$ — координаты какой-либо ее точки, $(m_1;\ n_1;\ p_1)$ — координаты направляющего вектора, а прямая b задана уравнением

$$\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2},$$

где $(x_2;\ y_2;\ z_2)$ — координаты какой-либо ее точки, $(m_2;\ n_2;\ p_2)$ — координаты направляющего вектора. Формула для вычисления угла между прямыми a и b получится, если выразить угол между их направляющими векторами с помощью скалярного произведения и формулы длины вектора **[?]**.

Несложно вывести и само уравнение (8), если вспомнить векторное задание прямой: точка X принадлежит прямой AB тогда и только тогда, когда выполняется равенство $\overrightarrow{AX}=t\cdot\overrightarrow{AB}$, где t — любое вещественное число **[?]**. Осталось переписать это равенство в координатах. Пусть вектор $\overrightarrow{AB}$ имеет координаты $(m;\ n;\ p)$. Если $X(x;\ y;\ z)$, $A(x_0;\ y_0;\ z_0)$, то $\overrightarrow{AX}=(x-x_0;\ y-y_0;\ z-z_0)$. Отсюда и получаем нужное нам уравнение **[?]**.

Уравнение (8) выглядит любопытно в иных частных случаях. Вот пример тому.

Задача 20. Чему равен угол между прямыми p и q, заданными уравнениями $x=y=z$ и $x=-y=\frac{z}{0}$ соответственно?

Что там такое в третьей дроби? Ноль в знаменателе? Мы что же, делим на ноль? «Спокойствие, прежде всего — спокойствие», как говорил Карлсон, который живет на крыше.

Для начала перепишем уравнения прямых так, чтобы были ясны координаты их направляющих векторов. Уравнение прямой p будет выглядеть так: $\frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}$, а уравнение прямой q примет вид $\frac{x}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{0}$. Здесь третья дробь только по виду означает деление, на самом деле наличие нуля в знаменателе означает, что третья координата направляющего вектора прямой q равна 0, т.е. эта прямая перпендикулярна оси z, всего-то. Итак, направляющие векторы прямых p и q имеют координаты $(1;\ 1;\ 1)$ и $(1;\ -1;\ 0)$ соответственно. Теперь вы можете получить нужный результат самостоятельно **[?]**.

Дальнейший разговор пойдет о том, как угол между скрещивающимися прямыми помогает при нахождении других углов: между прямой и плоскостью; между плоскостями; двугранного угла. Разговор этот будет коротким. Дело в том, что и вычисление этих углов, и использование их для определения других величин реализовано в громадном числе задач. Оставим это для другой статьи.

Вычисление угла между прямой и плоскостью

При нахождении угла между прямой и плоскостью можно, обойдя его определение, идти таким путем. Если мы введем в рассмотрение нормаль (перпендикулярную прямую) n к данной плоскости α, то угол φ между прямой a и плоскостью α будет дополнять до прямого угла угол φ_1 между прямой a и нормалью n к плоскости α, т.е. $\varphi+\varphi_1=90^\circ$ (рис. 22). Найдя φ_1, мы найдем искомый угол φ.

Находить таким способом угол между прямой и плоскостью вполне «нормально», если помнить, что угол характеризует отклонение. От какого направления отклоняется наша прямая? От направления нормали к плоскости.

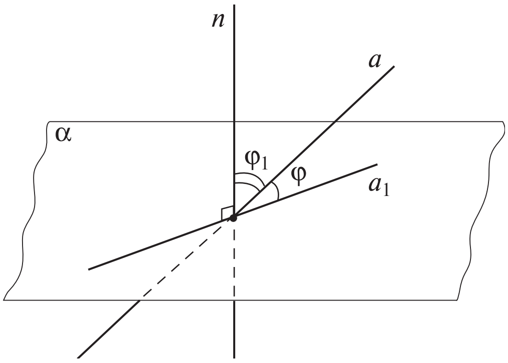

Рис. 22

Работа с нормалью имеет и другое преимущество по сравнению с традиционным методом — использованием проекции прямой на плоскость. Эта проекция фиксирована и потому может оказаться не вполне удобной для вычислений, а нормаль можно провести через какую угодно точку плоскости и выбрать такое положение нормали, при котором вычислить нужный угол будет наиболее просто.

Полезно знать основные нормали в кубе.

1. Ребро куба перпендикулярно граням, содержащим его концы, а также и любому сечению, параллельному этим граням (рис. 23).

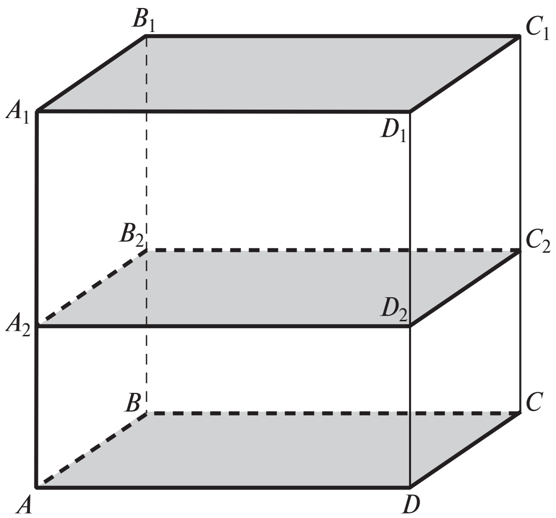

Рис. 23

2. Диагональ грани куба перпендикулярна его диагональному сечению, проходящему через вторую диагональ той же грани (рис. 24), а также и любому сечению, ему параллельному.

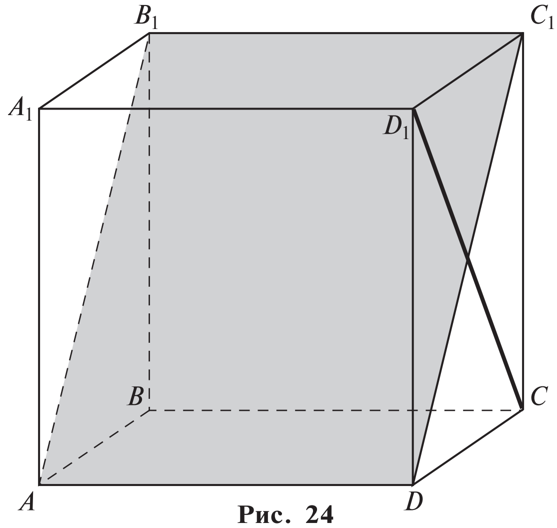

Рис. 24

3. Диагональ куба перпендикулярна его сечению, которое определяется тремя диагоналями граней куба, скрещивающимися с данной диагональю куба (рис. 25), а также и любому сечению, ему параллельному.

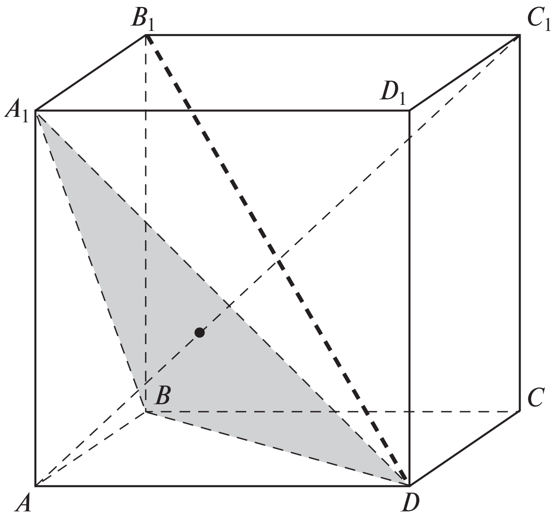

Рис. 25

Нормаль выбирается произвольно, поэтому, выбрав ее так, чтобы она пересекала данную прямую, можно свести задачу к планиметрической. Продемонстрирую этот способ нахождения угла между прямой и плоскостью при решении следующей задачи.

Задача 21. Вычислите угол между диагональю B_1D и плоскостью BDA_1 (рис. 26).

Нормалью к плоскости BDA_1 является, как известно, прямая AC_1, и задача моментально сводится к планиметрической — нахождению угла между диагоналями B_1D и AC_1 в прямоугольнике AB_1C_1D (см. рис. 26).

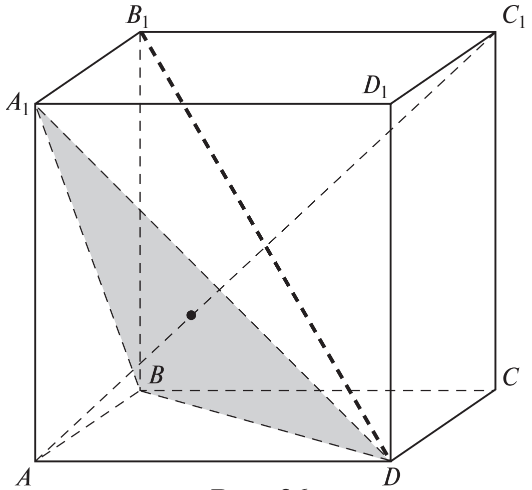

Рис. 26

Разумеется, здесь возможно применение векторного способа: сначала каким-то образом (используя координаты или обойдясь без них) выразим нормальный вектор данной плоскости, а затем с помощью скалярного умножения найдем угол между данной прямой и нормалью. Напомню: если уравнение плоскости имеет вид $Ax + By + Cz + D = 0$, то координаты ее нормального вектора — $(A;\ B;\ C)$.

Когда выбор нормали к плоскости очевиден, проще использовать чисто векторный способ. Вводим базис, затем выражаем через векторы базиса направляющий вектор данной прямой и направляющий вектор нормали, после чего применяем формулу для скалярного произведения векторов. Проделайте это в задаче 20 **[?]**.

А вот как выглядит решение, в котором используются координаты. Пусть начало координат находится в точке A, а оси координат направлены по лучам AD, AB, AA_1 (рис. 27).

Находим уравнение плоскости BDA_1, оно таково: $x + y + z = 1$. Координаты нормального вектора этой плоскости — $(1; 1; 1)$. Направляющий вектор $\overrightarrow{B_1D}$ прямой B_1D имеет координаты $(1; -1; -1)$ **[?]**. Дальнейшее очевидно — используйте скалярное умножение.

В этой задаче я показал общий способ решения. Разумеется, можно сразу искать координаты направляющего вектора нормали к плоскости BDA_1 (прямой AC_1). Однако иногда проще составить уравнение плоскости, из которого даром получаются координаты нужного вектора, чем искать их иным способом.

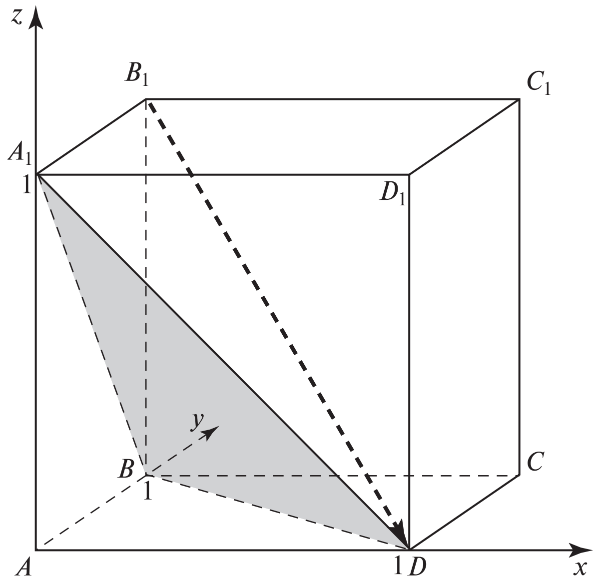

Рис. 27

Убедитесь в этом, решая следующую задачу.

Задача 22. Вычислите в кубе с ребром, равным 2, угол между прямой B_1D и плоскостью BUA_1 (рис. 28).

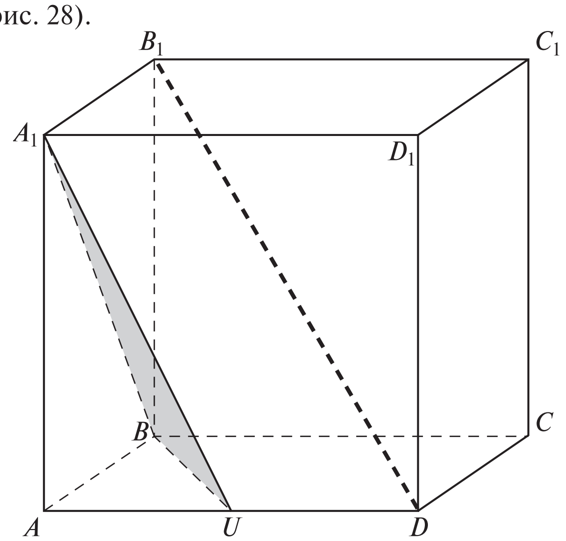

Рис. 28

В задаче 21 данная прямая и нормаль к плоскости пересекались. В случае, когда эти прямые скрещиваются, возможен выбор между разными способами нахождения угла. Вот пример.

Задача 23. Многогранник составлен из двух правильных четырехугольных пирамид $PABCD$ и $QABCD$, у которых все ребра равны. Вычислите угол между прямой PC и плоскостью QAB. (*Подсказка*. Нормаль к плоскости QAB проведите через центр квадрата $ABCD$.)

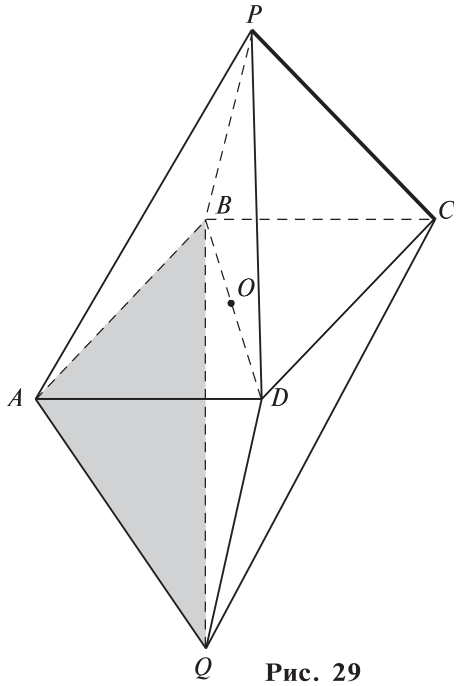

Рис. 29

Вычисление двугранного угла (угла между двумя плоскостями)

При нахождении угла между плоскостями можно миновать его определение и пойти иным путем. Если мы введем в рассмотрение нормали $n\alpha$ и $n\beta$ к данным плоскостям α и β соответственно, то угол φ между плоскостями α и β будет равен углу между нормалями $n\alpha$ и $n\beta$ (рис. 30).

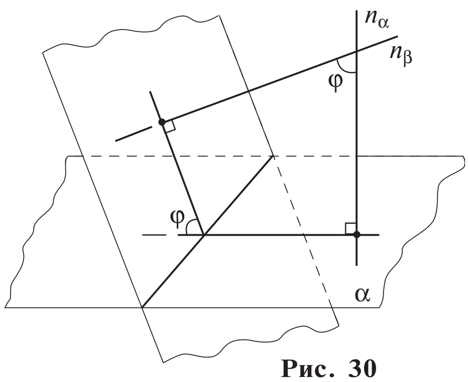

Рис. 30

Как и в случае угла между прямой и плоскостью, существенно, что нормали можно выбрать произвольно, а значит, сделать это наиболее эффективно для дальнейшего решения задачи. Иногда удается свести задачу к планиметрической, выбрав нормали так, чтобы они пересекались.

Продемонстрирую данный способ на следующем примере.

Задача 24. Вычислите угол между плоскостью A_1BD и плоскостью ACD_1 (рис. 31).

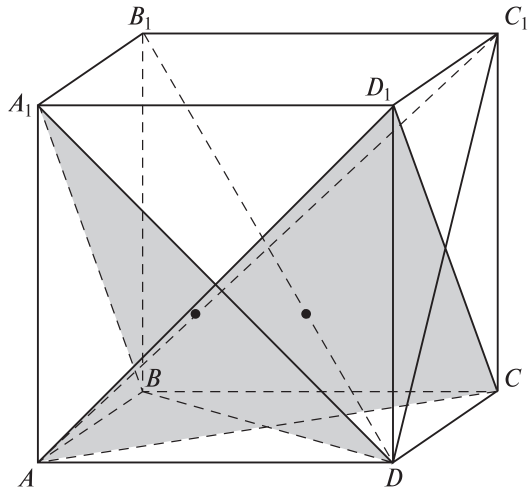

Рис. 31

Нормалью к плоскости BDA_1 является прямая AC_1, а нормалью к плоскости ACD_1 — прямая DB_1 (см. рис. 31). Задача сразу сводится к планиметрической — определению угла между диагоналями B_1D и AC_1 в прямоугольнике AB_1C_1D.

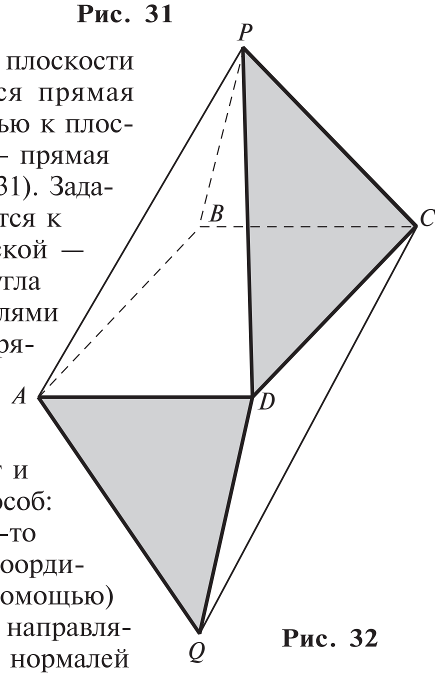

Рис. 32

Конечно, здесь подойдет и векторный способ: сначала каким-то образом (без координат или с их помощью) надо выразить направляющие векторы нормалей к данным плоскостям, а затем, используя скалярное умножение, найти угол между нормалями. Проделайте это самостоятельно.

В решении задачи 24 нормали пересекались. Если выбранные нормали окажутся скрещивающимися, предстоит сделать выбор между разными способами нахождения угла между ними.

Решите задачу 25, выбрав скрещивающиеся нормали.

Задача 25. Многогранник составлен из двух правильных четырехугольных пирамид $PABCD$ и $QABCD$, у которых все ребра равны. Вычислить угол между плоскостью ADQ и плоскостью PCD (рис. 32).

Задачи для самостоятельного решения

1. Докажите перпендикулярность противоположных ребер правильной треугольной пирамиды как можно большим числом способов.

2. Докажите, что в прямоугольном тетраэдре три пары попарно перпендикулярных скрещивающихся ребер.

3. Верно ли утверждение: два противоположных ребра тетраэдра перпендикулярны тогда, когда перпендикулярны ребра в каждой из двух других пар противоположных ребер?

4. Верно ли утверждение: две прямые взаимно перпендикулярны тогда и только тогда, когда существует плоскость такая, что проекции данных прямых на эту плоскость взаимно перпендикулярны?

5. а) Докажите, что в правильной треугольной бипирамиде скрещивающиеся ребра боковых граней не могут быть взаимно перпендикулярны.

б) В какой правильной n-угольной бипирамиде* есть два взаимно перпендикулярных скрещивающихся боковых ребра?

6. В основании прямоугольного параллелепипеда лежит квадрат. Могут ли быть перпендикулярными скрещивающиеся диагонали боковых граней такого параллелепипеда?

7. В правильной треугольной пирамиде $ABCD$ все углы при вершине D прямые. Вычислите угол между прямыми AN и DM, где точка M — середина ребра AB, а точка N — середина ребра CD.

8. В тетраэдре $ABCD$ ребро AD перпендикулярно грани ABC, $AD = AB = AC$, $\angle BAC = \varphi$. Найдите угол между прямыми AC и BD.

9. В правильной пирамиде $PABCD$ высота PQ равна стороне основания. Точки K, L и M — середины отрезков PC, AB и PQ соответственно. Расположите в порядке возрастания углы между прямыми: а) KQ и PD; б) KQ и BM; в) KQ и DL.

10. Боковые грани правильной шестиугольной пирамиды — квадраты. Чему равен угол между скрещивающимися диагоналями: а) соседних боковых граней; б) двух боковых граней, смежных с одной и той же боковой гранью?

11. В правильной призме $ABCA_1B_1C_1$ все ребра равны. Точки K, L, M — середины ребер B_1C_1, A_1B_1, AC соответственно. Расположить в порядке убывания углы между прямыми: а) KL и A_1C; б) KL и BM; в) KL и AB_1.

* *Правильная n-угольная бипирамида* — многогранник, составленный из двух равных правильных пирамид, которые имеют общее основание.

12. Высота правильной четырехугольной призмы вдвое больше ребра основания. Вычислите угол между диагональю призмы и скрещивающейся с ней диагональю боковой грани.

13. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Сравните углы, которые прямая B_1D образует с каждой из прямых AL и CN, где L и N — середины ребер BB_1 и DD_1 соответственно.

14. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точка X движется по границе грани $A_1B_1C_1D_1$ от A_1 к D_1. Как при этом изменяется угол между прямыми AC и DX?

15. В каких границах изменяется угол между прямыми, одна из которых проходит через фиксированную образующую боковой поверхности равностороннего конуса, а другая является «подвижной» касательной к окружности основания и может проходить через любую ее точку?

16. В каких границах изменяется угол между прямыми, одна из которых проходит через диагональ фиксированного квадратного осевого сечения цилиндра, а другая является «подвижной» касательной к окружности основания и может проходить через любую ее точку?

17. На сфере проведены меридиан и параллель. В каких границах изменяется угол между прямыми, одна из которых является касательной к меридиану в общей точке меридиана и параллели, а другая является «подвижной» касательной к параллели и может проходить через любую ее точку?

18. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точка X движется по ребру DD_1 от D к D_1, точка Y движется по ребру CC_1 от C к C_1. Движение начато одновременно и идет с одной и той же скоростью. Как изменяется угол между прямыми AY и BX?

19. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Нарисуйте отрезок AX с концом на грани $A_1B_1C_1D_1$ такой, что прямая AX образует равные углы с каждой из прямых B_1C_1 и CD, а также угол 45° с прямой CC_1.

20. Нарисуйте сечение правильного тетраэдра плоскостью: а) проходящей через его центр масс и перпендикулярной двум его скрещивающимся ребрам; б) проходящей через вершину и образующей равные углы с двумя гранями, содержащими эту вершину; в) проходящей через центр одной из граней и образующей равные углы с двумя гранями, одна из которых содержит этот центр; г) проходящей через центр масс и образующей равные углы с двумя гранями.

21. Нарисуйте сечение куба плоскостью: а) проходящей через вершину куба и образующей равные углы с двумя скрещивающимися его ребрами, не содержащими эту вершину; б) проходящей через вершину куба и образующей равные углы с гранью, содержащей эту вершину и диагональной плоскостью, не содержащей ее; в) проходящей через центр куба и образующей равные углы с его двумя смежными гранями.

22. Является ли треугольная пирамида правильной, если угол между каждой парой противоположных ребер один и тот же и при этом у нее равны: а) 5 ребер; б) 4 ребра, причем три из них лежат в одной грани; в) 4 ребра, причем никакие три не лежат в одной и той же грани; г) 3 ребра, лежащие в одной и той же грани?

23. Какими свойствами обладает тетраэдр с тремя парами взаимно перпендикулярных противоположных ребер?

Тесты

В предлагаемых тестах постарайтесь установить, истинно или ложно каждое из сформулированных утверждений.

Тест 1. Прямые a, b, c попарно скрещиваются. Тогда:

а) для любых прямых a и b найдется прямая c, перпендикулярная и a, и b;

б) для любых прямых a и b найдется прямая c, образующая и с a, и с b угол, равный φ;

в) для любых прямых a и b найдется прямая c, образующая с a угол, равный φ_1, а с b — угол, равный φ_2.

Тест 2. Прямые a, b, c попарно скрещиваются и попарно взаимно перпендикулярны. Тогда для любых таких прямых a, b, c найдется:

а) прямая, образующая с каждой из данных прямых один и тот же угол;

б) прямая, образующая с двумя из данных прямых равные углы, а с третьей прямой — заданный угол;

в) прямая, образующая с каждой из данных прямых заданные углы;

г) плоскость, образующая с каждой из данных прямых один и тот же угол;

д) плоскость, образующая с двумя из данных прямых равные углы, а с третьей прямой — заданный угол.

Тест 3. Плоскости α и β не параллельны и прямая p не параллельна каждой из них. Тогда:

а) для любых плоскостей α и β найдется прямая p, образующая с ними равные углы;

б) для любых плоскостей α и β найдется прямая p, образующая с плоскостью α угол, равный φ_1, а с плоскостью β — угол, равный φ_2.

Тест 4. Плоскости α, β и γ не параллельны между собой. Тогда:

а) для любых плоскостей α и β найдется плоскость г, перпендикулярная и α, и β;

б) для любых плоскостей α и β найдется плоскость г, образующая и с α, и с β угол, равный φ;

в) для любых плоскостей α и найдется плоскость г, образующая с α угол, равный φ_1, а с β — угол, равный φ_2.

Ю.И.Гольев, Д.А.Ларин, Г.П.Шанкин

КРИПТОГРАФИЯ И МАТЕМАТИКА

Криптография (в переводе с греческого языка — тайнопись) — это область научных, прикладных, инженерно-технических исследований и практической деятельности, которая связана с обеспечением информационной безопасности, а также преодолением криптографических средств защиты информации (криптоанализ).

Основным понятием криптографии является понятие шифра. Шифр является совокупностью некоторых алгоритмов, преобразующих открытый конфиденциальный текст в хаотический набор знаков (букв, чисел или специально придуманных символов), называемый шифртекстом. Алгоритм шифрования является обратимым, то есть позволяет из шифртекста восстановить исходный текст. Процесс преобразования шифрованного текста в открытый называется расшифрованием. Эти преобразования зависят от секретного ключа. Смена ключа приводит к появлению другого шифртекста. Приведем примеры шифров, которые человечество использует с глубокой древности.

Шифр простой замены

Шифр простой замены характеризуется тем, что при его использовании отдельные части открыто-