В.И.Рыжик

О РАССТОЯНИИ ВООБЩЕ И РАССТОЯНИИ МЕЖДУ СКРЕЩИВАЮЩИМИСЯ ПРЯМЫМИ В ЧАСТНОСТИ

Окончание. Начало см. в № 4 за 2007 г.

Большое видится на расстоянье.
С.Есенин

От теории — к практике

А теперь перейдем к задачам. В самых простых из них нужный кратчайший отрезок — общий перпендикуляр двух скрещивающихся прямых, что называется «виден невооруженным глазом».

Задача 1. Чему равно в единичном кубе* $ABCDA_1B_1C_1D_1$ расстояние между скрещивающимися прямыми: а) AA_1 и CD; б) BB_1 и A_1D; в) AA_1 и BD; г) A_1B и C_1D?

Искомым расстоянием является длина общего перпендикуляра указанных прямых, т.е. отрезок: а) AD; б) A_1B_1; в) AO, где O — центр грани $ABCD$; г) PQ, где точки P и Q — центры граней AA_1B_1B и CC_1D_1D соответственно.

Задача 2. Чему равно в единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ расстояние между скрещивающимися прямыми: а) BD_1 и AC; б) DB_1 и AB?

В этой задаче общий перпендикуляр увидеть уже труднее, но ученик с развитым пространственным мышлением справится и с этой задачей. А вы сможете?

Известен способ построения общего перпендикуляра, когда скрещивающиеся прямые взаимно перпендикулярны. Через каждую из них проходит плоскость, перпендикулярная другой прямой. Искомый общий перпендикуляр лежит на прямой пересечения этих плоскостей [?] и является отрезком с концами в точках пересечения прямых с соответствующими плоскостями (рис. 1). На этом

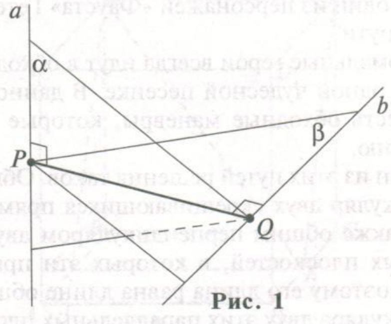

Рис. 1

* Так называется куб, ребро которого равно 1.

рисунке a и b — скрещивающиеся прямые, α и β — перпендикулярные плоскости, PQ — общий перпендикуляр прямых a и b.

Возможен и облегченный вариант построения, когда не требуется рисовать обе плоскости, достаточно только одной из них. Тогда общий перпендикуляр двух скрещивающихся и взаимно перпендикулярных прямых является перпендикуляром, проведенным из точки пересечения одной из данных прямых с построенной плоскостью, на другую прямую (рис. 2). На этом рисунке a и b — скрещивающиеся прямые, β — плоскость, проходящая через b и перпендикулярная a, PQ — искомый общий перпендикуляр.

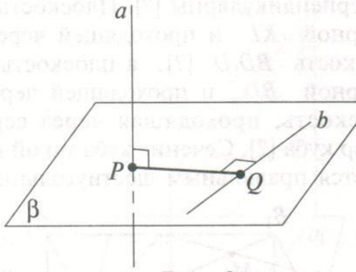

Рис. 2

И в том и в другом случае общий перпендикуляр двух скрещивающихся прямых появится на рисунке.

Этот способ, причем в обоих вариантах, можно применить в задаче 2, а) (если вы не «увидели» общий перпендикуляр). Плоскость BDD_1 перпендикулярна прямой AC [?], плоскость AB_1C перпендикулярна прямой BD_1 [?], а потому прямой, перпендикулярной прямым AC и BD_1, будет общая прямая B_1O указанных плоскостей, где O — середина AC (рис. 3).

Осталось найти длину отрезка OP (P — точка пересечения прямых B_1O и BD_1), который и является общим перпендикуляром прямых AC и BD_1. Разумеется, можно и сразу, не проводя плоскости AB_1C, искать расстояние от точки O — проекции прямой AC на плоскость BDD_1 — до прямой BD_1.

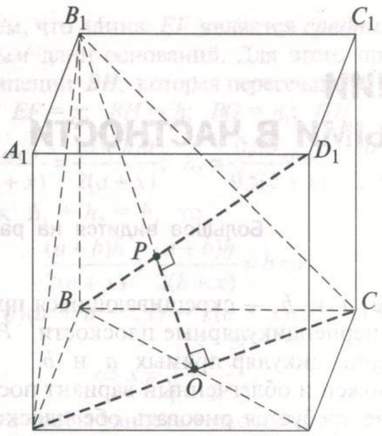

Рис. 3

Применим описанный способ в более сложном случае — для решения задачи 3.

Задача 3. Чему равно в единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ расстояние между скрещивающимися прямыми BD_1 и KL, где точка K — середина ребра AD, а L — середина ребра CD?

Для начала убедимся, что прямые BD_1 и KL взаимно перпендикулярны [?]. Плоскостью, перпендикулярной KL и проходящей через BD_1, будет плоскость BD_1D [?], а плоскостью, перпендикулярной BD_1 и проходящей через KL, будет плоскость, проходящая через середины шести ребер куба [?]. Сечение куба такой плоскостью является правильным шестиугольником [?] (рис. 4).

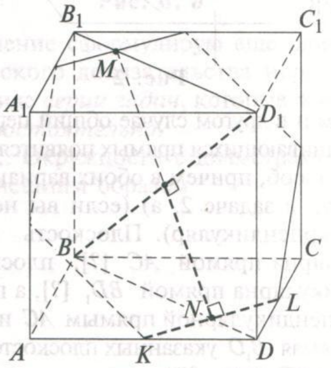

Рис. 4

Тогда прямая, перпендикулярная обеим данным прямым, — это прямая MN, где M — точка пересечения отрезка B_1D_1 с одной из сторон получившегося шестиугольника, а N — точка пересечения отрезка KL с другой стороной шестиугольника (см. рис. 4).

Найти длину отрезка MN — задача из планиметрии, а искомый общий перпендикуляр прямых BD_1 и KL составляет половину отрезка MN [?]. Разумеется, можно идти и вторым путем, вычисляя расстояние от точки N — проекции прямой KL на плоскость BDD_1 — до прямой BD_1.

Когда приходится идти в обход...

А теперь очень хорошо известная задача.

Задача 4. Чему равно в единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ расстояние между скрещивающимися прямыми DA_1 и CD_1?

Я поздравляю того читателя, который, впервые получив эту задачу и сделав чертеж, увидел общий перпендикуляр прямых DA_1 и CD_1. Правда, можно увидеть прямую AC_1, перпендикулярную обеим прямым [?] (рис. 5), но она явно не пересекает ни DA_1, ни CD_1, а потому не может нам дать общий перпендикуляр.

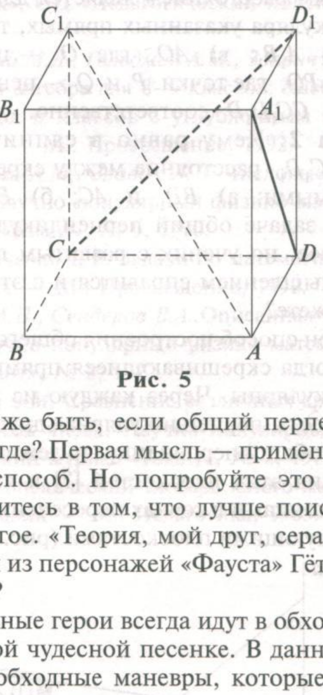

Рис. 5

Так как же быть, если общий перпендикуляр непонятно где? Первая мысль — применить «стандартный» способ. Но попробуйте это сделать и скоро убедитесь в том, что лучше поискать что-нибудь другое. «Теория, мой друг, сера...», — говорил один из персонажей «Фауста» Гёте. Есть ли иные пути?

Нормальные герои всегда идут в обход, как поется в одной чудесной песенке. В данном случае тоже есть обходные маневры, которые сейчас и напомню.

Один из этих путей решения таков. Общий перпендикуляр двух скрещивающихся прямых является также общим перпендикуляром двух параллельных плоскостей, в которых эти прямые лежат. Поэтому его длина равна длине общего перпендикуляра двух этих параллельных плоскостей, а его можно нарисовать в любом подходящем месте. В нашей задаче этот метод работает прекрасно.

В самом деле, прямые DA_1 и CD_1 лежат в параллельных плоскостях DA_1B и CD_1B_1 [?] (рис. 6). Из свойств куба известно, что диагональ AC_1 перпендикулярна каждой из этих плоскостей и делится ими на три равные части. Тогда расстояние между указанными плоскостями, а значит, и между данными скрещивающимися прямыми, равно трети длины диагонали AC_1 куба, т.е. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

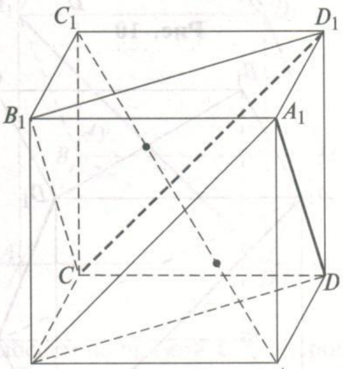

Рис. 6

В следующей задаче мы пойдем иным путем.

Задача 5. Чему равно в единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ расстояние между скрещивающимися прямыми AD и B_1K, где K — середина ребра CD?

Через одну из этих прямых проведем плоскость, параллельную другой прямой. В принципе неважно, через какую прямую ее проводить, все решают соображения удобства. Я проведу плоскость через прямую B_1K. В результате получится сечение куба, проходящее через точку L — середину ребра AB [?] (рис. 7).

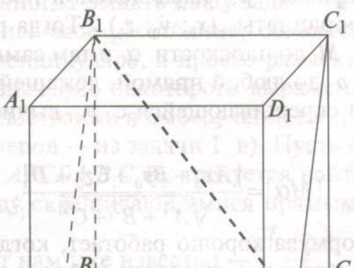

Рис. 7

Общий перпендикуляр прямой AD и построенной плоскости будем проводить из точки A. Это удобно, так как он будет лежать в плоскости грани AA_1B_1B [?]. В результате задача сведется к планиметрической и ее несложно решить разными способами [?]. Ответ в задаче — $\frac{2}{\sqrt{5}}$.

С помощью ортогонального проектирования

Еще один окольный путь решения связан с ортогональным проектированием. Пусть a и b — данные скрещивающиеся прямые. Сначала проводим плоскость γ, перпендикулярную одной из данных прямых, например a. А потом спроектируем (с помощью плоскости β) на плоскость γ прямую b. Расстояние между данными скрещивающимися прямыми — это расстояние между их проекциями на проведенную плоскость γ: одна из этих проекций — точка P, а другая — прямая b_1 (рис. 8), поэтому надо найти расстояние от точки P до прямой b_1 в плоскости γ, т.е. длину отрезка PQ. Подумайте, как обосновать этот способ[3].

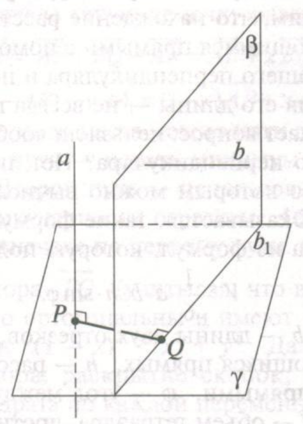

Рис. 8

Для его иллюстрации решим задачу 6.

Задача 6. Чему равно в единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ расстояние между скрещивающимися прямыми B_1C и KL, где точки K и L — середины ребер AA_1 и CC_1 соответственно?

Проведем плоскость BB_1D_1. Она будет перпендикулярна прямой KL [?]. Точка T — проекция прямой KL на проведенную плоскость. Далее

[3] Частный случай этого способа был разобран выше — в решении задач 2, а).

спроектируем на плоскость BB_1D_1 прямую B_1C — ее проекцией будет прямая B_1O, где точка O — середина диагонали BD основания куба (рис. 9). Осталось найти расстояния OT, B_1O, B_1T в прямоугольнике BB_1D_1D и закончить вычисление, что является несложной задачей планиметрии [?].

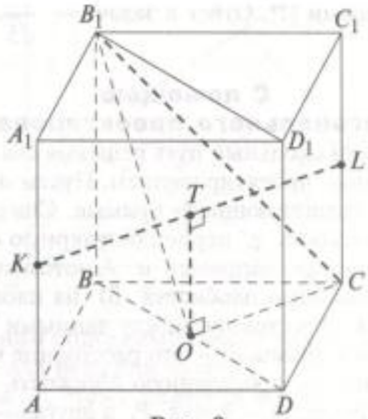

Рис. 9

Нельзя ли обойтись без общего перпендикуляра?

Мы видим, что нахождение расстояния между скрещивающимися прямыми с помощью построения их общего перпендикуляра и последующего нахождения его длины — не всегда простая задача. Возникает вопрос: нельзя ли вообще обойтись без общего перпендикуляра? Нет ли каких-либо формул, по которым можно вычислить это расстояние? Оказывается, такие формулы есть!

Вот одна из формул, которую полезно знать:

$$V=\frac{1}{6}\cdot a\cdot b\cdot h\cdot\sin\varphi,$$

где a и b — длины двух отрезков, лежащих на скрещивающихся прямых, h — расстояние между этими прямыми, φ — угол между этими прямыми, а V — объем тетраэдра, противоположные ребра которого — данные отрезки.

Попробуйте сами ее получить. Это несложно, если рассмотреть тетраэдр как часть параллелепипеда, в котором диагонали граней совпадают с ребрами тетраэдра (рис. 10).

Посмотрите, как легко по этой формуле вычисляется расстояние в задаче 4. Объем тетраэдра A_1CDD_1 равен $\frac{1}{6}$, угол между прямыми DA_1 и CD_1 равен $60°$ [?], $a=b=\sqrt{2}$ (рис. 11). Подставив эти величины в формулу, сразу же получаем нужное расстояние.

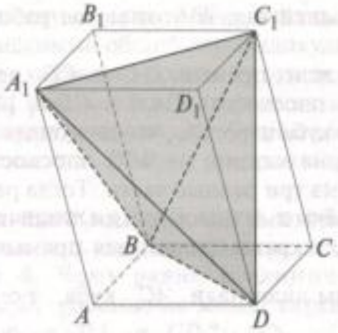

Рис. 10

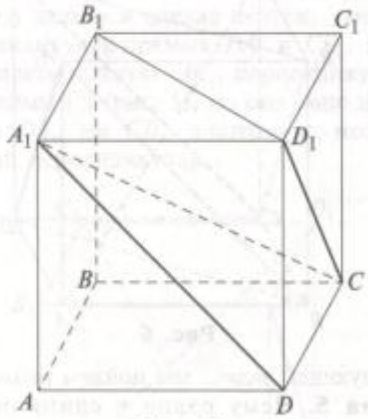

Рис. 11

Применяем метод координат

Еще одну формулу, «косвенную», можно найти в справочнике по математике, а теперь она включена в школьную программу и рассматривается при изучении метода координат в пространстве — это формула расстояния от точки до плоскости.

Пусть уравнение плоскости α в общем виде таково: $Ax + By + Cz + D = 0$, а точка M, лежащая на прямой p, параллельной плоскости α, имеет координаты $(x_0;\ y_0;\ z_0)$. Тогда расстояние от точки M до плоскости α и тем самым расстояние от p до любой прямой, лежащей в плоскости α и скрещивающейся с p, вычисляется по формуле:

$$|M\alpha|=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Эта формула хорошо работает, когда скрещивающиеся прямые отнесены к фигурам, в которых много «перпендикулярностей», например к прямоугольному параллелепипеду, в частности к кубу. Посмотрим, как этим методом решается задача 4.

Нам дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и пусть начало координат находится в точке A, а оси x, y, z направлены по лучам AD, AB, AA_1 соответственно. Сначала «создадим» пару параллельных между собой прямой и плоскости — пусть это будет прямая CD_1 и плоскость DBA_1 (рис. 12).

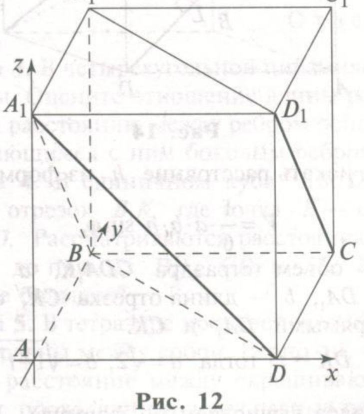

Рис. 12

Далее выберем на прямой CD_1 «хорошую» точку (с простыми координатами), скажем точку C. Уравнение плоскости DBA_1 имеет вид $x + y + z - 1 = 0$ [?], а координаты точки C — (1; 1; 0). Подсчет по приведенной выше формуле моментально дает нужный ответ.

Если вы будете изучать аналитическую геометрию, то сможете узнать и другие способы вычисления расстояния между скрещивающимися прямыми. В одном из них применяется формула, позволяющая находить это расстояние, если известны уравнения скрещивающихся прямых.

Используем векторы

Есть еще один метод — векторный, который помогает иногда решать нашу задачу «в лоб», т.е. находить искомое расстояние, обходясь без общего перпендикуляра, а просто разыскивая наименьшее значение некоторого выражения.

Для иллюстрации я выберу один из самых простых примеров — из задачи 1, в). Пусть в единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ требуется найти расстояние между скрещивающимися прямыми AA_1 и BD. Ответ нам уже известен — $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, и посмотрите, как он получается.

Для начала выбираем ортогональный базис пространства — тройку попарно перпендикулярных единичных векторов. Пусть это будут векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AA_1}$. Затем выбираем какую-то точку P на прямой AA_1 и какую-то точку Q на прямой BD, выражаем вектор $\overrightarrow{PQ}$ через векторы базиса и отыскиваем наименьшее значение скалярного квадрата вектора $\overrightarrow{PQ}$, т.е. квадрата длины отрезка, на котором задан этот вектор (рис. 13).

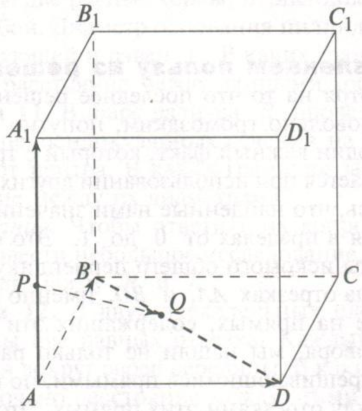

Рис. 13

Имеем вначале такую цепочку равенств:

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BQ} - \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + x\overrightarrow{BD} - y\overrightarrow{AA_1} =$$
$$= \overrightarrow{AB} + x(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) - y\overrightarrow{AA_1} = (1-x)\overrightarrow{AB} + x\overrightarrow{AD} - y\overrightarrow{AA_1}.$$

Начиная с этого места можно идти двумя путями. Первый путь — искать минимум длины отрезка PQ. Второй путь — использовать условие его перпендикулярности отрезкам AA_1 и BD.

Пройдем вначале по первому пути. Скалярный квадрат вектора $\overrightarrow{PQ}$ (учитывая, что векторы базиса попарно ортогональны и имеют единичную длину) равен $(1 - x)^2 + x^2 + y^2$. Далее — одна только алгебра: раскрытие скобок, выделение полного квадрата по каждой переменной, в итоге придем к равенству

$$PQ^2 = 2(x - 0,5)^2 + y^2 + 0,5.$$

Наименьшее значение получившегося выражения достигается при $x = \frac{1}{2}$, $y = 0$ и равно $\frac{1}{2}$, тогда $PQ = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Пройдем теперь по второму пути. Условие перпендикулярности векторов $\overrightarrow{PQ}$ и $\overrightarrow{AA_1}$ дает нам равенство нулю их скалярного произведения; записав его в координатной форме (координаты данных векторов — $(1 - x; x; -y)$ и $(0; 0; 1)$

соответственно), приходим к уравнению $y = 0$. Аналогично, рассматривая перпендикулярные векторы $\overrightarrow{PQ}$ и $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$, приходим к уравнению $2x - 1 = 0$. Полученная система уравнений дает решение: $x = \frac{1}{2},\ y = 0$. Осталось записать координаты вектора $\overrightarrow{PQ}$ и вычислить его длину.

Извлекаем пользу из решения

Несмотря на то что последнее решение получилось довольно громоздким, попутно мы установили один важный факт, который с трудом устанавливается при использовании других методов. Оказалось, что найденные нами значения x и y находятся в пределах от 0 до 1. Это означает, что концы искомого общего перпендикуляра находятся на отрезках AA_1 и BD, именно на отрезках, а не на прямых, содержащих эти отрезки. Иначе говоря, мы нашли не только расстояние между скрещивающимися прямыми, но и расстояние между отрезками этих прямых. Этот дополнительный результат, полученный нами по ходу дела, полностью оправдывает внешнюю неуклюжесть описанного способа решения.

Мы ведь понимаем, что отрезки, лежащие на скрещивающихся прямых, могут быть достаточно далеко от общего перпендикуляра этих прямых, но тогда расстояние между ними вовсе не равно длине этого перпендикуляра.

Итак, применив векторный метод для решения простенькой задачи, мы решили задачу более сложную: нашли расстояние не только между скрещивающимися прямыми, но и между лежащими на них отрезками.

Вы можете проверить себя, решив этим способом (в подходящем варианте) задачу 4. Если получится, то вы найдете довольно симпатичные точки на диагоналях граней куба, которые и будут ближайшими.

А если прямая движется?

Посмотрим теперь, как может изменяться расстояние между двумя скрещивающимися прямыми в динамике, т.е. когда одна из них — «переменная» прямая.

Задача 7. Точка K принадлежит ребру DD_1 единичного куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Как при движении точки K по ребру DD_1 (от D к D_1) изменяется расстояние между скрещивающимися прямыми A_1D и CK (рис. 14)?

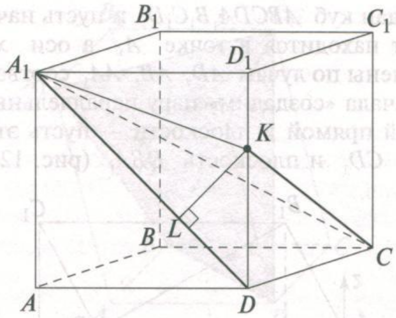

Рис. 14

Будем искать расстояние h из формулы

$$V = \frac{1}{6}\cdot a\cdot b\cdot h\cdot \sin\varphi,$$

где V — объем тетраэдра CDA_1K, a — длина отрезка DA_1, b — длина отрезка CK, φ — угол между прямыми DA_1 и CK.

Пусть $DK = t$, тогда $a = \sqrt{2}$, $b = \sqrt{1+t^2}$. Объем V тетраэдра вычисляем по формуле $V = \frac{1}{3}SH$, где S — площадь основания DA_1K, а H — высота CD тетраэдра. $CD = 1$, $S_{DA_1K} = \frac{t}{2}$ [?], тогда $V = \frac{t}{6}$.

Угол φ найдем, используя способ проекций. Проекцией отрезка CK на прямую DA_1 является отрезок DL (см. рис. 14). Найдя его длину (а это — несложная планиметрическая задача), вычисляем косинус, а затем и синус нужного нам угла: $\sin\varphi = \sqrt{\frac{t^2+2}{2(t^2+1)}}$.

Теперь находим искомое расстояние: $h = \frac{t}{\sqrt{t^2+2}}$. При возрастании t от 0 до 1 значение дроби возрастает (достаточно взять производную или поделить почленно числитель и знаменатель на t и посмотреть, как ведет себя дробь при увеличении t). Итак, окончательный результат: при движении точки K по ребру DD_1 (от D к D_1) расстояние между прямыми A_1D и CK увеличивается.

В заключение — несколько задач. Как чисто учебных, так и для абитуриентов.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Дан прямоугольный параллелепипед. Докажите, что расстояние между его ребром и диагональю, не имеющей с этим ребром общих точек, зависит только от двух измерений параллелепипеда.

Задача 2. Каждое ребро правильной треугольной призмы равно 1. Вычислить расстояние между скрещивающимися диагоналями ее боковых граней.

Ответ: $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

Задача 3. В четырехугольной пирамиде все ребра равны. Оцените отношение длины ребра пирамиды к расстоянию между ребром основания и скрещивающимся с ним боковым ребром.

Задача 4. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведен отрезок B_1K, где точка K — середина ребра AD. Рассматриваются расстояния от прямой B_1K до прямых DD_1, CD и AC. Какое из них самое большое?

Задача 5. В тетраэдре противоположные ребра попарно равны между собой. Верно ли, что наибольшее расстояние между скрещивающимися прямыми, проходящими через равные ребра, тем больше, чем больше длины этих ребер?

Задача 6. Докажите, что в правильном тетраэдре расстояния между скрещивающимися ребрами равны. Верно ли обратное?

Задача 7. Какая пара скрещивающихся ребер октаэдра расположена наиболее близко друг к другу?

Задача 8. Ребро правильного тетраэдра $ABCD$ равно 1. Точка K — середина ребра AB, точка L делит ребро CD в отношении 1 : 2, считая от точки C. Чему равно расстояние между прямыми BC и KL?

Ответ: $\frac{\sqrt{6}}{9}$.

Задача 9. В тетраэдре $ABCD$ основанием является правильный треугольник ABC, ребро DA перпендикулярно плоскости основания. Через точку C и середину K ребра DB проведена прямая. Угол между прямыми AD и CK равен 60°, а расстояние между этими прямыми равно 2. Чему равен объем тетраэдра?

Ответ: $\frac{16\sqrt{3}}{3}$.

Задача 10. На разных основаниях цилиндра проведены две равные хорды, перпендикулярные между собой. Диаметр основания цилиндра равен его образующей и равен 1. В каких границах заключено расстояние между данными хордами?

Задача 11. В шаре радиуса R проведены два взаимно перпендикулярных сечения на расстоянии h от центра. В каких границах заключено расстояние между их диаметрами?

Замечание. Чтобы ответить на вопрос, предстоит провести небольшое исследование, учтя соотношения между R и h.

Задача 12. В двух параллельных плоскостях проведены два равных отрезка. Каждый из них вращается вокруг своей середины. В каких границах заключено расстояние между этими отрезками, если расстояние между плоскостями равно 10, расстояние между серединами отрезков равно 20, а сами отрезки имеют длину 2?

Задача 13. Как найти расстояние между: а) двумя шарами; б) шаром и плоскостью; в) цилиндром и плоскостью; г) конусом и плоскостью; д) шаром и цилиндром; е) шаром и конусом?

Если вам понравилось решать задачи о скрещивающихся прямых, то немало интересных задач можно найти в книгах [1, 2].

Литература

1. *Литвиненко В.Н.* Сборник задач по стереометрии. — М.: Просвещение, 1998.

2. *Крайзман М.* Расстояния между скрещивающимися прямыми. Практикум абитуриента. Геометрия. Выпуск 3. — М.: Бюро Квантум, 1996.