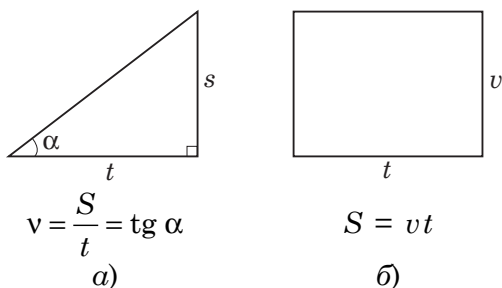


**В.И.Рыжик**

## ИЩИТЕ ТАНГЕНСЫ!

Поскольку в заданиях ЕГЭ появились текстовые задачи, имеет смысл вернуться к ним при повторении и использовать при их решении знания, которые были неизвестны школьникам младших классов. Я покажу, как при решении таких задач может помочь геометрия.

Общая ситуация с текстовыми задачами такова. Рассматривается некий процесс, происходящий во времени. Это может быть механическое движение, выполнение какой-либо работы, покупка товара, смешивание веществ и т.д. Выделяются три величины, характеризующие этот процесс: его объем, время и скорость протекания. Одна из них является постоянной, а две другие либо прямо, либо обратно пропорциональными. Каждая величина может быть представлена геометрически: длиной отрезка (любая из трех величин), площадью прямоугольника (произведение величин) или тангенсом некоторого угла (отношение величин). Например, в задаче на движение допускается такая интерпретация величин: скорость движения — это тангенс острого угла в прямоугольном треугольнике, катеты которого — длины отрезков, изображающих расстояние и время (рис. 1, а); пройденное расстояние — это площадь прямоугольника, стороны которого — длины отрезков, изображающих скорость и время (рис. 1, б).



**Рис. 1**

Аналогично интерпретируются такие тройки величин: объем работы, время работы и производительность труда; стоимость товара, его количество и цена; масса жидкости, масса растворенного в ней вещества и его концентрация. В таком случае классификация текстовых задач согласно сюжету не имеет принципиального значения, именно поэтому далее я разбираю только задачи на равномерное механическое движение.

В их интерпретации я буду использовать прямоугольники двух видов. В одном прямоугольнике стороны будут задавать время и расстояние — его используем, когда в задаче есть информация (явная или неявная) о расстояниях. Неявная информация говорит не о конкретных значениях расстояния, а, например, о том, что некие расстояния равны или известна их разность. В другом прямоугольнике стороны будут задавать время и скорость — его используем, когда в задаче есть информация о скоростях (явная или неявная). Неявная информация говорит не о конкретных значениях скоростей, а, например, об их отношении или разности.

### **Внимание.**

Прежде чем будете знакомиться с предлагаемыми решениями, попробуйте справиться с каждой задачей традиционным способом.

Начну с прямоугольника первого вида.

**Задача 1.** Скорый поезд проходит расстояние между двумя городами за 36 ч, а пассажирский — за 45 ч. Через какое время поезда встретятся, если выйдут одновременно из этих городов навстречу друг другу?

**Решение.** Нарисуем прямоугольник  $ABCD$ . На луче  $AD$  будем откладывать время, на луче  $AB$  — расстояние. Отрезки  $AD$  и  $AG = BF$  ( $G \in AD$ ,  $F \in BC$ ) показывают время движения пассажирского и скорого поездов соответственно,  $AD = 45$ ,  $AG = 36$ . Пусть  $P$  — точка пересечения отрезков  $AF$  и  $BD$  (рис. 2).

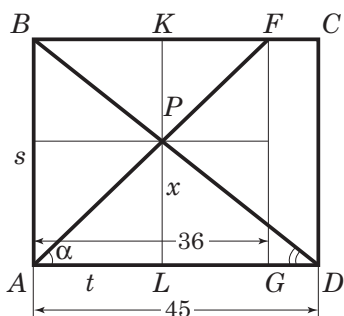


Рис. 2

Проведем через точку  $P$  вертикальный отрезок  $KL$  ( $K \in BC$ ,  $L \in AD$ ). Тогда отрезок  $LP$  обозначает расстояние, пройденное скорым поездом, отрезок  $PK$  — расстояние, пройденное пассажирским поездом, а отрезок  $AL$  — время до встречи поездов.

Введем обозначения:  $AB = s$  (расстояние между городами),  $LP = x$ ,  $AL = t$ . Запишем тангенсы углов  $\alpha$  и  $\beta$  (скорости поездов) на рис. 2:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{PL}{AL} = \frac{x}{t} = \frac{s}{36}, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{PL}{LD} = \frac{x}{45-t} = \frac{s}{45}.$$

Имеем систему двух уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} \frac{x}{t} = \frac{s}{36} \\ \frac{x}{45-t} = \frac{s}{45} \end{cases}$$

Разделив второе уравнение на первое, получим уравнение относительно  $t$ :

$$\frac{t}{45-t} = \frac{4}{5},$$

откуда  $t = 20$ .

Ответ: через 20 ч.

**Замечание.** Возможно и более простое решение. Воспользуемся тем фактом, что если два тела, расстояние между которыми равно  $s$ , одновременно начинают двигаться навстречу друг другу со скоростями  $v_1$  и  $v_2$ , то время  $t$ , через которое они встретятся, вычисляется по формуле

$$t = \frac{s}{v_1 + v_2}.$$

Пусть  $AB = s$ . Запишем тангенсы углов  $\alpha$  и  $\beta$  на рис. 2:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{PL}{AL} = \frac{FG}{AG} = \frac{s}{36}, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{PL}{LD} = \frac{AB}{AD} = \frac{s}{45}.$$

Тогда искомое время

$$t = \frac{s}{\frac{s}{36} + \frac{s}{45}},$$

откуда  $t = 20$ .

**Задача 2.** Скорый поезд проходит расстояние между городами за 4 ч, а пассажирский — за 6 ч. Через какое время поезда встретятся, если они едут навстречу друг другу, и пассажирский поезд вышел на 2 ч позже скорого?

**Решение.** Нарисуем прямоугольник  $ABCD$ . На луче  $AD$  будем откладывать время, на луче  $AB$  — расстояние. Отрезок  $AD$  показывает время в пути скорого поезда,  $AD = 4$ . Пусть отрезок  $AG = BF$  ( $G \in AD$ ,  $F \in BC$ ) изображает время запаздывания пассажирского поезда,  $AG = 2$ . Отрезок  $GM$  на луче  $AD$  показывает время движения пассажирского поезда,  $GM = 6$ . Обозначим буквой  $P$  точку пересечения отрезков  $AC$  и  $FM$  (рис. 3).

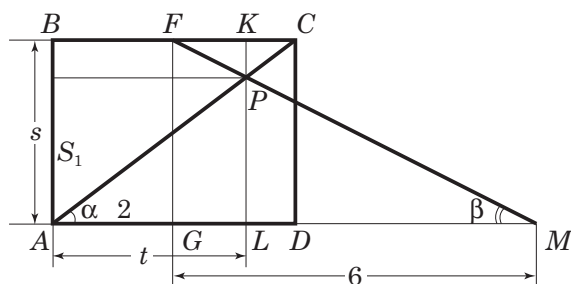


Рис. 3

Через точку  $P$  проведем вертикальный отрезок  $KL$  ( $K \in BC$ ,  $L \in AD$ ). Тогда отрезок  $AL = t$  обозначает искомое время, отрезок  $LP = s_1$  — расстояние, пройденное до встречи скорым поездом, а отрезок  $PK$  — расстояние, пройденное до встречи пассажирским поездом.

Расстояние  $AB$  между городами обозначим буквой  $s$ . Запишем тангенсы углов  $\alpha$  и  $\beta$  (скорости поездов) на этом рисунке:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \frac{PL}{AL} = \frac{CD}{AD}, \quad \text{иначе} \quad \frac{s_1}{t} = \frac{s}{4}, \\ \operatorname{tg} \beta &= \frac{PL}{LM} = \frac{FG}{GM}, \quad \text{иначе} \quad \frac{s_1}{8-t} = \frac{s}{6}. \end{aligned}$$

Из системы

$$\begin{cases} \frac{s_1}{t} = \frac{s}{4} \\ \frac{s_1}{8-t} = \frac{s}{6} \end{cases}$$

найдем, что  $t = 3,2$ .

О т в е т: через 3,2 ч.

**Задача 3.** Расстояние между двумя городами 54 км. Из одного города одновременно выехали два велосипедиста. Первый ехал со скоростью 25 км/ч, а второй — со скоростью 15 км/ч. Через сколько времени одному из велосипедистов останется проехать расстояние, в шесть раз большее, чем другому?

**Решение.** Нарисуем прямоугольник  $ABCD$ . На луче  $AD$  будем откладывать

время, а на луче  $AB$  — пройденное расстояние. Отрезок  $AD$  показывает время, за которое доберется до города второй велосипедист. Пусть отрезок  $BF$  ( $F \in BC$ ) изображает время, за которое доберется до города первый велосипедист. На стороне  $AD$  отложим отрезок  $AL$ , длина которого обозначает искомое время  $t$ . Проведем вертикальный отрезок  $KL$  ( $K \in BC$ ), на нем отметим точки  $M$  и  $N$  — точки пересечения  $KL$  с отрезками  $AF$  и  $BD$  соответственно (рис. 4).

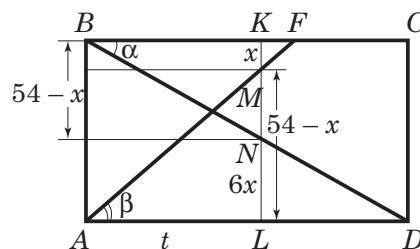


Рис. 4

Тогда отрезок  $LN = 6x$  обозначает расстояние, оставшееся проехать ко времени  $t$  второму велосипедисту, а отрезок  $KM = x$  обозначает расстояние, оставшееся проехать ко времени  $t$  первому велосипедисту.

Запишем тангенсы углов  $\alpha$  и  $\beta$  (скорости велосипедистов) на рис. 4:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{KN}{BK} = \frac{54-6x}{t} = 15,$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{ML}{AL} = \frac{54-x}{t} = 25.$$

Решив систему

$$\begin{cases} \frac{54-6x}{t} = 15 \\ \frac{54-x}{t} = 25, \end{cases}$$

получим  $t = 2$ .

О т в е т: через 2 ч.

**Задача 4.** Из пункта  $P_1$  в пункт  $P_2$  вышел турист, одновременно с ним из пункта  $P_2$  в пункт  $P_1$  вышел другой ту-

рист. Они встретились в полдень. Оставшуюся часть пути первый турист прошел за 9 ч, а второй — за 4 ч. Какое время показывали часы, когда туристы вышли навстречу друг другу?

**Решение.** Нарисуем прямоугольник  $ABCD$ . На луче  $AD$  будем откладывать время, на луче  $AB$  — расстояние. Временные промежутки обозначим так: от начала отсчета времени (точки  $A$ ) до времени встречи туристов —  $AK = t$ , от времени встречи до времени прихода первого туриста в пункт  $P_2$  —  $KD = 4$ , от времени прихода первого туриста в пункт  $P_2$  до времени прихода второго туриста в пункт  $P_1$  —  $DF = 5$  (рис. 5). Точка  $T$  соответствует моменту встречи туристов. Соответствующие расстояния обозначим так:  $AM = S_1$ ,  $MB = S_2$ .

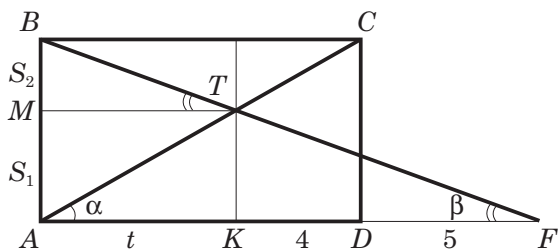


Рис. 5

Из этого рисунка видно, что

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{TK}{AK} = \frac{CD}{AD}, \text{ иначе } \frac{S_1}{t} = \frac{S_1 + S_2}{t + 4},$$

откуда получаем, что  $\frac{S_2}{S_1} = \frac{4}{t}$ .

Аналогично

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{BM}{MT} = \frac{TK}{KF}, \text{ иначе } \frac{S_2}{t} = \frac{S_1}{9},$$

откуда получаем, что  $\frac{S_2}{S_1} = \frac{t}{9}$ .

Приравняв выражения, полученные для  $\frac{S_2}{S_1}$ , найдем, что  $t = 6$ .

Итак, туристы вышли в 6.00.

О т в е т: в 6 ч утра.

**Задача 5.** Два пешехода вышли навстречу друг другу и двигались с постоянными скоростями. Первый отправился из пункта  $P_1$  на 6 ч позже второго, который вышел из пункта  $P_2$ . Когда пешеходы встретились, оказалось, что первый прошел на 12 км меньше второго. Продолжив дальнейший путь, первый пешеход добрался до пункта  $P_2$  через 8 ч, а второй — до пункта  $P_1$  через 9 ч. Какова была скорость каждого пешехода?

**Решение.** Нарисуем прямоугольник  $ABCD$ . На луче  $AD$  откладываем время, на луче  $AB$  — расстояние. Временные промежутки обозначим так: от начала отсчета (точки  $A$ ) до времени выхода первого пешехода —  $AK = 6$ , от времени выхода первого пешехода до времени встречи —  $KL = y$ , от времени встречи до времени прихода первого пешехода в пункт  $P_2$  —  $LD = 8$ , от времени прихода первого пешехода в пункт  $P_2$  до времени прихода второго туриста в пункт  $P_1$  —  $DN = 1$  (рис. 6).

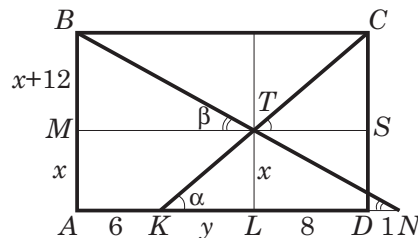


Рис. 6

Пусть расстояние от  $A$  до места встречи  $AM = x$ . Тогда  $MB = x + 12$ . Точка  $T$  — точка пересечения отрезков  $BN$  и  $CK$ .

Из рисунка ясно, что

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{TL}{KL} = \frac{CS}{TS}, \text{ иначе } \frac{x}{y} = \frac{x + 12}{8},$$

откуда получаем, что  $y = \frac{8x}{x + 12}$ .

Аналогично

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{BM}{MT} = \frac{TL}{LN}, \quad \text{иначе} \quad \frac{x+12}{y+6} = \frac{x}{9},$$

откуда получаем, что  $y = \frac{3x+108}{x}$ .

Приравняв выражения, полученные для  $y$ , найдем, что  $x = 36$ . Тогда  $y = 6$ .

Скорость первого пешехода  $36 : 6 = 6$  км/ч, скорость второго  $48 : 12 = 4$  км/ч.

О т в е т: 6 км/ч, 4 км/ч.

Иногда возможна такая интерпретация задачи на движение, в которой задействована лишь одна скорость (рассматривается тангенс одного угла). Вот классический пример.

**Задача 6.** Из пункта  $P_1$  в пункт  $P_2$  по течению катер плывет 5 ч, а обратно — 7 ч. За какое время доплывет из пункта  $P_1$  в пункт  $P_2$  плот?

Р е ш е н и е. Нарисуем прямоугольник  $ABCD$ . Пусть  $AB$  — удвоенное расстояние  $AM$  между пунктами,  $BM = AM = KL = s$ ;  $AK = 5$  — время, которое катер плыл по течению (из  $P_1$  в  $P_2$ ),  $KD = 7$  — время, которое катер плыл против течения (из  $P_2$  в  $P_1$ ). Наконец,  $DN$  — расстояние, которое проплыл бы катер, двигаясь все 12 ч по течению (рис. 7).

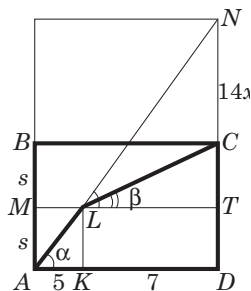


Рис. 7

Из условия задачи следует, что  $CN = 2x \cdot 7$ , где  $x$  — скорость течения. Тогда

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{LK}{AK} = \frac{NT}{LT}, \quad \text{иначе} \quad \frac{s}{5} = \frac{s+14x}{7}.$$

Решив это уравнение, получим  $x = \frac{s}{35}$ .

Отсюда время движения плота — 35 ч.

О т в е т: 35 ч.

Перейдем к задачам, в интерпретации которых используется прямоугольник второго вида (его стороны представляют время и скорость).

**Задача 7.** Если скорость поезда, указанную в расписании, увеличить на  $v_1$ , то он придет в конечный пункт раньше срока на время  $t_1$ . Если ту же скорость уменьшить на  $v_2$ , то поезд придет в конечный пункт с опозданием на время  $t_2$ . Каковы скорость поезда и время его движения согласно расписанию?

Р е ш е н и е. Нарисуем прямоугольник  $ABCD$ . На луче  $AD$  будем откладывать время, на луче  $AB$  — скорость. Пусть  $AD = t_0$  — время поезда в пути согласно расписанию,  $AD_1 = t_0 - t_1$  — время движения с увеличенной скоростью,  $AD_2 = t_0 + t_2$  — время движения с уменьшенной скоростью;  $AB = v_0$  — скорость поезда согласно расписанию,  $AB_2 = v_0 - v_2$  — уменьшенная скорость,  $AB_1 = v_0 + v_1$  — увеличенная скорость (рис. 8).

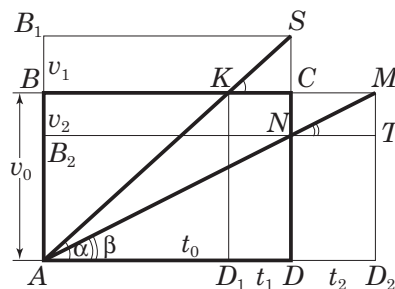


Рис. 8

На основе этого рисунка запишем тангенсы углов  $\alpha$  и  $\beta$ :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{SC}{KC} = \frac{KD_1}{AD_1}, \quad \text{иначе} \quad \frac{v_1}{t_1} = \frac{v_0}{t_0 - t_1},$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{MT}{NT} = \frac{ND}{AD}, \quad \text{иначе} \quad \frac{v_2}{t_2} = \frac{v_0 - v_2}{t_0}.$$

Из системы

$$\begin{cases} \frac{v_1}{t_1} = \frac{v_0}{t_0 - t_1} \\ \frac{v_2}{t_2} = \frac{v_0 - v_2}{t_0} \end{cases}$$

находим  $t_0$  и  $v_0$ :

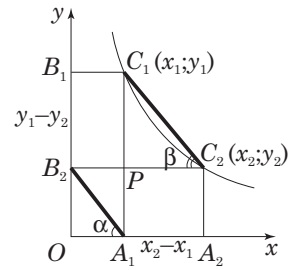
$$t_0 = \frac{t_1 t_2 (v_1 + v_2)}{v_1 t_2 - v_2 t_1}, \quad v_0 = \frac{v_1 v_2 (t_1 + t_2)}{v_1 t_2 - v_2 t_1}.$$

Попробуйте разобраться, что стоит за равенством нулю знаменателя этих дробей.

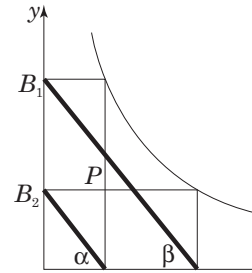
Далее будем опираться на простое соображение: если объем процесса фиксирован, то произведение скорости процесса на время процесса (при равномерном его протекании) также постоянно, а потому график зависимости скорости от времени представляет собой гиперболу. В решении задач будет использоваться свойство хорды гиперболы, заданной уравнением  $xy = c$ ,  $c > 0$ . Хорда этой гиперболы (отрезок, соединяющий две ее точки) параллельна двум отрезкам, также связанным с этой гиперболой (они соединяют проекции точек гиперболы на оси координат).

Пусть  $C_1$  и  $C_2$  — две точки на данной гиперболе, лежащие в первой координатной четверти,  $A_1$  и  $A_2$  — их проекции на ось  $x$  (соответственно), а  $B_1$  и  $B_2$  — проекции точек  $C_1$  и  $C_2$  на ось  $y$  (соответственно).

Сначала докажем параллельность отрезков  $A_1 B_2$  и  $A_2 B_1$  (рис. 9, а). Для этого достаточно установить, что тангенсы углов  $OA_1 B_2$  и  $OA_2 B_1$  равны, что моментально следует из уравнения гиперболы. (Проделайте это самостоятельно.)



а)



б)

Рис. 9

Теперь докажем параллельность отрезков  $C_1 C_2$  (хорды гиперболы) и  $A_1 B_2$  (рис. 9, б). Для этого достаточно установить равенство тангенсов углов  $OA_1 B_2$  и  $PC_2 C_1$ . Пусть  $\angle OA_1 B_2 = \alpha$ ,  $\angle PC_2 C_1 = \beta$ , тогда

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{OB_2}{OA_1} = \frac{y_2}{x_1} = \frac{c}{x_1 x_2},$$

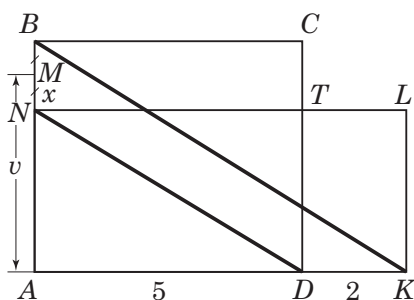
$$\operatorname{tg} \beta = \frac{PC_1}{PC_2} = \frac{y_1 - y_2}{x_2 - x_1} = \frac{\frac{c}{x_1} - \frac{c}{x_2}}{x_2 - x_1} = \frac{c}{x_1 x_2}.$$

Из того, что  $A_1 B_2 \parallel A_2 B_1$  и  $A_1 B_2 \parallel C_1 C_2$ , следует параллельность хорды  $C_1 C_2$  и отрезка  $A_2 B_1$ .

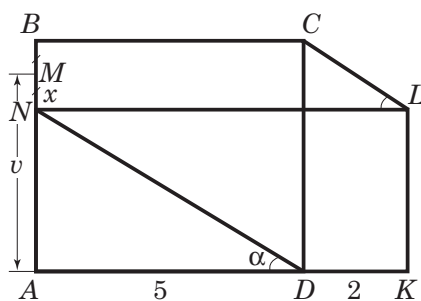
Посмотрите, как работает свойство хорды гиперболы при решении задачи про плот (см. задачу 6), причем использоваться может любая из этих трех «параллельностей». Приведу два возможных способа решения.

Нарисуем прямоугольник  $ABCD$ . На луче  $AD$  будем откладывать время, на

луче  $AB$  — скорость. Пусть  $AD = 5$  — время, затраченное катером на движение по течению,  $AK = 7$  — время, затраченное им на движение против течения,  $AM = v$  — собственная скорость катера,  $x$  — скорость течения,  $AB = v + x$  — скорость по течению,  $AN = v - x$  — скорость против течения. Площади прямоугольников  $ABCD$  и  $ANLK$  (рис. 10) соответствуют заданному расстоянию, а потому равны, значит, можно применить только что полученные результаты.



а)



б)

Рис. 10

I способ.  $DN \parallel KB$  (см. рис. 10, а),

$$\operatorname{tg} \angle ADN = \frac{AN}{AD} = \frac{v-x}{5},$$

$$\operatorname{tg} \angle AKB = \frac{AB}{AK} = \frac{v+x}{7}.$$

Так как выражения равны, то из уравнения  $\frac{v-x}{5} = \frac{v+x}{7}$  получаем, что  $v = 6x$ . Дальнейшее очевидно.

II способ.  $CL \parallel DN$  (см. рис. 10, б),

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{AN}{AD} = \frac{CT}{TL}, \text{ иначе } \frac{v-x}{5} = \frac{2x}{2},$$

откуда  $v = 6x$ . Дальнейшее очевидно.

Третья параллельность приводит к тому же результату, в чем вы можете убедиться самостоятельно.

Что дает геометрическая интерпретация текстовой задачи? Она позволяет «увидеть» описанную в условии ситуацию в целом, т.е. привлечь для решения наглядные образы. Это уже немало. Вот любопытный пример тому.

**Задача 8.** Из поселка в деревню по одной и той же дороге с постоянными скоростями идут два пешехода. Первый пешеход вышел на час позже, но пришел на час раньше. В каком месте дороги он обогнал второго пешехода?

Решение. Нарисуем прямоугольник  $ABCD$ . На отрезке  $AD$  отложим время, а на отрезке  $AB$  — расстояние. Расстояние  $AK$  соответствует времени задержки,  $AK = 1$ , а расстояние  $LD$  — времени опережения,  $LD = MC = 1$  (рис. 11). Проведем отрезки  $AC$  и  $KM$  — траектории пешеходов (если угодно — графики движения в соответствующей системе координат).

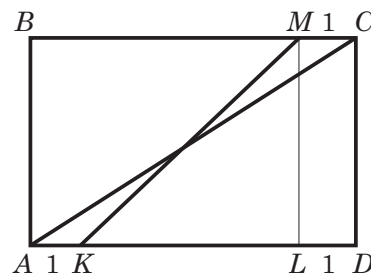


Рис. 11

Из геометрических представлений (вся конфигурация обладает центральной симметрией) ясно, что пересекутся эти отрезки в точке пересечения диагоналей прямоугольника  $ABCD$ , в его центре



симметрии. Отсюда делаем вывод, что встреча пешеходов произошла посередине дороги. «Увидеть» это рассуждение можно за секунды.

О т в е т: посередине дороги.

Далее, геометрическая интерпретация облегчает проверку задачи: соответствия составленной модели условию и самого условия задачи на непротиворечивость, ибо она сводится к выяснению свойств, а также существования достаточно простой геометрической конфигурации.

Геометрическое решение приведенных выше задач может основываться не только на сравнении тангенсов углов, но и на подобии треугольников. Тангенсы углов я полагаю более уместными. Во-первых, информация для решения «вычерпывается» из прямоугольного треугольника и отношения его катетов. Во-вторых, связь тангенса угла со скоростью существенна для понимания производной — ее физического и геометрического смысла. В-третьих, тангенс угла помогает и тогда, когда в решении опираться на подобие треугольников невозможно. Вот пример (нарушающий некое однообразие тематики в предыдущих задачах).

**Задача 9.** Школьник во время тестовой работы решал 20 задач. За каждую верно решенную задачу он получал 5 баллов. За каждую неверно решенную задачу с него снимали 3 балла. В итоге школьник набрал 4 балла. Сколько задач он решил верно?

**Р е ш е н и е.** Для упрощения рисунка будем считать, что сначала школьник получал только верные ответы, а уже затем — только неверные. Нарисуем прямоугольник  $ABCD$ , пусть его сторона  $AD$  изображает число решенных задач, а на стороне  $AB$  отложим число набранных баллов. Пусть  $AK = x$  — число задач,

решенных верно,  $KD = 20 - x$  — число задач, решенных неверно,  $AB$  — число баллов за верные ответы,  $CM = BN = y$  — число снятых баллов,  $AN = 4$  — итоговая сумма баллов (рис. 12).

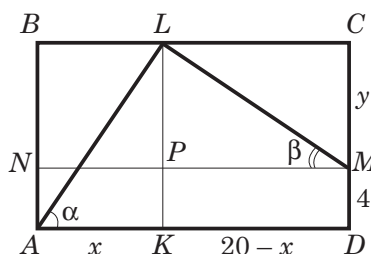


Рис. 12

Запишем тангенсы углов  $\alpha$  и  $\beta$  (баллы, полученные за верно решенную задачу и снятые за неверно решенную соответственно):

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{KL}{AK}, \quad \text{иначе} \quad \frac{y+4}{x} = 5,$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{LP}{PM}, \quad \text{иначе} \quad \frac{y}{20-x} = 3.$$

Решив систему

$$\begin{cases} \frac{y+4}{x} = 5 \\ \frac{y}{20-x} = 3, \end{cases}$$

получим  $x = 8$ .

Итак, ученик решил верно 8 задач.

О т в е т: 8 задач.

*Замечание.* Процесс, описанный в этой задаче, не является непрерывным, он дискретен, но для приведенного решения мы его полагаем непрерывным. Разумеется, в подобных ситуациях необходима коррекция полученного результата — он должен быть натуральным числом.

Интересен и другой пример геометрической интерпретации, в том числе «работы тангенсов», — нахождение среднего значения, точнее средней скорости движения.



**Задача 10.** Объект за время  $t_1$  прошел расстояние  $s_1$ , а затем за время  $t_2$  расстояние  $s_2$ . Какова средняя скорость его движения за все время?

**Решение.** Геометрическая интерпретация такова. На горизонтальном отрезке  $AC$  отметим точку  $K$ . При этом  $AK = t_1$ ,  $KC = t_2$ . Из точек  $K$  и  $C$  проведем перпендикуляры  $KM$  и  $CB$  такие, что  $KM = CF = s_1$ ,  $FB = s_2$ . Проведем также отрезки  $AM$ ,  $MB$ ,  $AB$  (рис. 13).

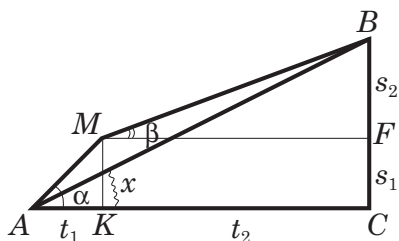


Рис. 13

Теперь имеем:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \frac{KM}{KA} = \frac{s_1}{t_1}, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{BF}{FM} = \frac{s_2}{t_2}, \\ \operatorname{tg} x &= \frac{BC}{CA} = \frac{s_1 + s_2}{t_1 + t_2} = \frac{t_1 \operatorname{tg} \alpha + t_2 \operatorname{tg} \beta}{t_1 + t_2} = \\ &= \frac{t_1}{t_1 + t_2} \operatorname{tg} \alpha + \frac{t_2}{t_1 + t_2} \operatorname{tg} \beta. \end{aligned}$$

Из полученного равенства для средней

скорости  $v_{\text{ср.}}$  двух движений со скоростями  $v_1$  и  $v_2$  получаем:

$$v_{\text{ср.}} = \left( \frac{t_1}{t_1 + t_2} \right) v_1 + \left( \frac{t_2}{t_1 + t_2} \right) v_2.$$

Может быть, вам это соотношение между величинами что-то напомнит?

Умея решать задачи на движение, аналогичные тем, которые я привел, вы можете решать задачи с другим содержанием. Вот шуточный пример тому.

В известном монологе о раках эстрадного артиста Р.Карцева его персонаж полон переживаний в такой ситуации: вчера на рынке продавались крупные раки по 5 руб. за штуку, а сегодня раки стоят дешевле — по 3 руб. за штуку (действительно, бывали и такие цены), но они мелкие. Допустим, что на имеющуюся в наличии сумму денег персонаж мог купить мелких раков на десять больше, чем крупных. Попробуйте ответить на вопрос: какой суммой располагал герой монолога?

В заключение добавлю, что я привел только два вида задач: когда в одном процессе есть два участника или в двух процессах есть один участник (впрочем, иногда задачу одного вида можно свести к задаче другого вида). О прочих ситуациях — в другой раз.

