Варианты вступительных работ по математике в 10 класс

2008 год

1. Найдите все решения неравенства $\sqrt{|x|-1}\cdot x^2 \le 9\sqrt{|x|-1}$.

2. Решите уравнение $(x-3)^2+\dfrac{1}{x^2-3(2x-3)}=2$.

3. Изобразите на плоскости множество точек (x,y) с координатами, удовлетворяющими неравенству $y^4<x^4$.

4. Половину пути катер преодолел со скоростью 30 км/ч. Вторую половину – со скоростью 10 км/ч. Найдите среднюю скорость движения катера. (Средняя скорость движения – весь путь, делённый на все время).

5. Решите систему: $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=6 \\ \frac{1}{y}+\frac{1}{z}=4 \\ \frac{1}{z}+\frac{1}{x}=5 \end{cases}$.

6. Высота равнобедренного треугольника, опущенная на основание, в три раза больше радиуса вписанной окружности. Найдите угол при основании треугольника.

2009 год

1. 30 учителей из пяти школ составили 40 задач для городской олимпиады. Учителя из одной и той же школы составили по одинаковому количеству задач, а учителя из разных школ составили по разному количеству задач. Сколько учителей придумали по одной задаче?
2. Найдите диагональ равнобокой трапеции с основаниями 4 см и 5 см, если она является биссектрисой одного из ее углов.
3. Пусть a – корень уравнения $x^3+7x-9=0$. Найдите значение выражения $\dfrac{2a^3+3a}{11a-18}$.
4. Корни уравнения $x^2+ax+1=b$ являются целыми числами, не равными нулю. Докажите, что число a^2+b^2 – составное.
5. Решите уравнение $\left(\dfrac{x-2}{\sqrt{x}}\right)^2-5\left(\dfrac{x-2}{\sqrt{x}}\right)+4=0$.
6. Решите неравенство $\dfrac{4}{|x-1|}>1$.

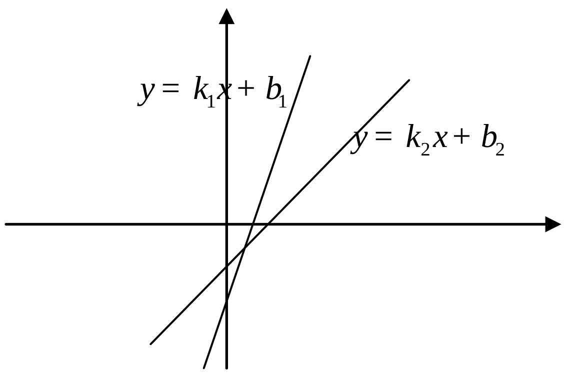
2010 год

1. Найдите значение выражения $\left(\dfrac{2}{(2z+1)^2}-\dfrac{1}{1-4z^2}\right):\dfrac{1}{(1+2z)^2}-\dfrac{6z}{2z-1}$ при $z=0,75$.

2. В полдень 1 апреля самолет вылетел из столицы в город Находка и приземлился там в 14 часов местного времени. В полночь по местному времени он вылетел обратно и оказался в столице в 6 часов утра 2 апреля. Сколько времени длился полет в одну сторону, если известно, что время полета туда и обратно было одинаково?

3. Решите неравенство $\dfrac{x^2+6x+9}{(3-2x)^3(x-4)^2}\le 0$.

4. После урока математики на доске остался чертеж (смотри рисунок), на котором были изображены две прямые, одна задавалась уравнением $y=k_1x+b_1$, а вторая – уравнением $y=k_2x+b_2$. Расставьте в порядке возрастания числа k_1, b_1, k_2, b_2.

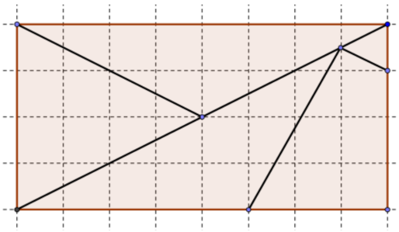


5. Решите уравнение $\dfrac{\sqrt{4-3x-x^2}}{2x+3}=\dfrac{\sqrt{4-3x-x^2}}{5+x}$.

6. Найдите площадь трапеции, если ее высота равна 4, ее диагонали равны 6 и 8, а оба угла при большем основании острые.

2011 год

1. Пройдя половину пути, катер увеличил скорость на 25% и поэтому прибыл на полчаса раньше. Сколько времени он двигался?
2. Найдите квадратичную функцию (то есть вида $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$), график которой проходит через точки (1;2), (−1;3) и (0;0).
3. Решите систему $\begin{cases} x^2y + y^2x = 6 \\ xy + x + y = 5 \end{cases}$.
4. Угол равнобедренного треугольника равен 120°. Высота, проведенная к боковой стороне, равна 9 см. Найдите стороны треугольника.
5. Малыш нарезал тортик на куски (см. рисунок). Помогите Карлсону взять кусок самой большой площади.



6. а) Сколько слагаемых получится после приведения многочлена $(a+b-c)(d-e+f)(-g-h)$ к стандартному виду (то есть после "раскрытия скобок")?

   б) Сколько при этом получится слагаемых со знаком "минус"?

2012 год

1. Решите неравенство $\frac{\sqrt{2x-3+x^2}}{25-x^2} \geq 0$.
2. Расположите в порядке возрастания числа: $9\sqrt{3}-3\sqrt{27},\ 2\sqrt{19}, 5\sqrt{3},\ \sqrt{7}-4$ (не забудьте обосновать ответ!).
3. Произведение двух натуральных чисел, каждое из которых не делится на 10, равно 1000. Найдите сумму этих чисел (приведите все возможные варианты).
4. Дорога от дома до школы занимает у Пети 20 минут. (Петя всегда идет с постоянной скоростью). Однажды по дороге в школу он вспомнил, что забыл дома ручку. Если теперь он продолжит свой путь с той же скоростью, то придет в школу за 3 мин до звонка, а если вернется домой за ручкой, то, идя с той же скоростью, опоздает к началу урока на 7 мин. Какую часть пути он прошел до того, как вспомнил о ручке?
5. На координатной плоскости отмечены точки $A(1;\ 1)$, $B(3;\ 5)$ и $C(0;\ 6)$. Найдите площадь треугольника ABC.
6. Найдите наименьшее значение выражения $x^2-2xy+2y^2+1$. При каких значениях переменных x и y оно достигается?

2013 год

1. У Вани на 90 конфет больше, чем у Маши. Одновременно Ваня и Маша отдали друг другу треть всех конфет, которые у них были. На сколько конфет больше теперь у Вани?
2. Сравните числа $\sqrt{0{,}04}-\left(\sqrt{7}-2\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{8}+\sqrt{7}\right)$ и $\frac{7}{6}$.
3. Решите неравенство $\frac{7x+3}{x+3} \geq -\frac{x}{2(x+3)}$.
4. Найдите все пары чисел (x, y), удовлетворяющих условию $\left(\frac{-3x+y+4}{2}\right)^2+\left(\frac{x+3y-1}{5}\right)^2=0$.
5. Положительные числа a и b таковы, что $a^2+b=b^2+a$. Иван Васильевич поспорил с Анатолием Алексеевичем, что тогда обязательно $a=b$. Кто выиграл спор?
6. В ΔABC $\angle B=40°$, $\angle C=20°$. AM – биссектриса, $AM=2$ см. Найти разность $BC-AC$.

2014 год

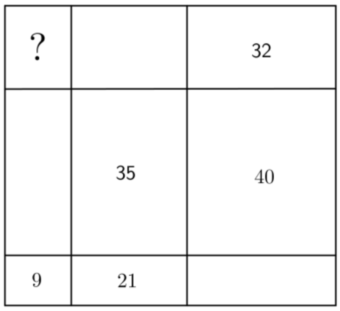
1. Решите неравенство $\frac{5x-12}{x^2-x-12} \leq 1$.
2. В турнире по волейболу (ничьих не бывает) каждая команда сыграла с каждой по одному разу. Известно, что ровно 25% команд не выиграли ни одного матча. Сколько команд участвовало в турнире? Приведите все возможные варианты и докажите, что других нет.
3. Решите уравнение $\left(1+\frac{2}{x}\right)\left(1+\frac{3}{x}\right)(x+4)(x+6) = 12$.
4. Число $\frac{1}{42}$ разложили в бесконечную десятичную дробь. Затем вычеркнули 2014-ю цифру после запятой, а все цифры, стоящие справа от вычеркнутой цифры, сдвинули на 1 влево. Какое число больше: новое или первоначальное?
5. В квадрате $ABCD$ точка M – середина AB, точка N – середина BC, точка E – середина MN, точка F – середина ND, точка G – середина MD. Найдите площадь треугольника EFG, если сторона квадрата равна 8.
6. Корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ с неизвестными коэффициентами равны 2 и 3. Найдите корни уравнения $cx^2 + bx + a = 0$.

2015 год

1. Решите неравенство $(x-4)\sqrt{x^2-7x+10} \geq 0$.
2. Решите уравнение $\frac{x-3}{(x-1)(x-4)} + \frac{(x-1)(x-4)}{x-3} = \frac{5}{2}$.
3. В треугольнике ABC проведена биссектриса BB_1. Пусть M – такая точка плоскости, что отрезок MB_1 пересекает сторону BC в точке K, $BM = AB_1$, $\angle MBB_1 = \angle BB_1A$. Докажите, что $BK = KB_1$.
4. Ученики ФТШ ходили в поход. Петя заметил, что 11 дней похода были дождливыми. Оля заметила, что не было такого дня, чтобы дождь был и до, и после обеда, а Костя заметил, что утром не было дождя ровно 16 раз, а вечером не было дождя 11 раз. Сколько дней длился поход?
5. Найдите хотя бы одну тройку различных натуральных чисел n, m и t таких, что верно равенство $\frac{1}{n} + \frac{1}{m} + \frac{1}{t} = \frac{1}{2015}$.
6. При каких значениях параметра a неравенство $\frac{ax^2+5x+11}{x^2+3x+10} > 1$ выполняется для всех значений переменной x, кроме одного?

2016 год

1. Найдите все значения x, при которых график каждой из двух функций $f(x) = x^2 - 3x$ и $g(x) = -\frac{1}{x+2}$ лежит выше графика функции $y = x$.
2. При каких значениях параметра a уравнение $\frac{ax^2+2x-3}{x-1} = 0$ имеет единственное решение?
3. Большой прямоугольник четырьмя линиями, параллельными основаниям, разбит на 9 прямоугольников, периметры пяти из которых указаны на рисунке.

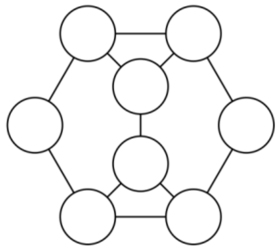


   а) Найдите периметр левого верхнего прямоугольника.

   б) Найдите периметр всего прямоугольника.
4. Три ученика лицея ФТШ ехали в разных вагонах одного и того же поезда метро. Подъезжая к станции "Выборгская", каждый из них стал подсчитывать количество колонн, мимо которых он проехал. Один насчитал 15 колонн, второй – 12, и третий – 7 колонн. Когда поезд опять стал двигаться, они начали считать оставшиеся колонны, причем один из них насчитал в три раза больше колонн, чем другой. Сколько насчитал оставшийся ученик?
5. Василию, Петру, Семену и их женам Наталье, Ирине, Анне вместе 151 год. Каждый муж старше своей жены на 5 лет. Василий на 1 год старше Ирины. Наталье и Василию вместе 48 лет, Семену и Наталье вместе 52 года. Кто на ком женат, и сколько кому лет? (Возраст должен быть выражен в целых числах).
6. Число 51,2 трижды увеличивали на одно и то же число процентов, а затем трижды уменьшали на то же самое число процентов. В результате получилось число 21,6. На сколько процентов увеличивали, а затем уменьшали это число?

2017 год

1. Расставьте в кружки на картинке числа от 2 до 9 (без повторений) так, чтобы никакое число не делило бы нацело ни одного из своих соседей.



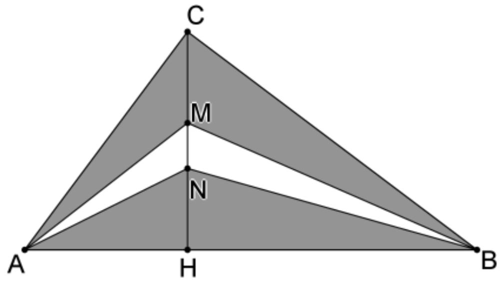
2. Решите неравенство: $\frac{7}{(x-1)(x-2)}+\frac{9}{x-2}+1<0$.
3. В треугольнике ABC известно, что $AB=BC$. На лучах CA, AB и BC отмечены соответственно точки D, E и F так, что $AD=AC, BE=BA$, $CF=CB$. Найдите сумму углов $\angle ADB+\angle BEC+\angle CFA$.
4. Решите уравнение:

$$1-\Big(2-\Big(3-\Big(\ldots\Big(2015-\big(2016-(2017-x)\big)\Big)\ldots\Big)\Big)\Big)=1000.$$

5. Три спутника выведены на околоземную орбиту, по которой они вращаются с постоянными скоростями. Когда первый спутник сделал несколько оборотов, он на 80 оборотов обогнал второй и на 100 оборотов третий. Сколько оборотов сделал первый спутник, если второй спутник, сделав такое же количество оборотов, как и первый, обогнал третий на 25 оборотов?
6. Изобразите на плоскости все точки, координаты которых удовлетворяют уравнению: $y(x+2)=x^2-4$.

2018 год

1. Два угла треугольника равны 100° и 60°. Покажите, как его разрезать на два равнобедренных треугольника.
2. В прямоугольном треугольнике ABC катеты AC и BC равны 6 и 8. На высоте CH выбраны точки M и N так, что площадь заштрихованной части равна 19. Найдите MN.



3. Решите систему уравнений:
$$\begin{cases} a^2 - 1 = b, \\ b^2 - 1 = a. \end{cases}$$
4. Решите неравенство: $\frac{1}{x+3} - \frac{1}{x-1} \leq 1$.
5. Из города A в город B, расстояние между которыми 100 км, в 9:00 вышли два автобуса, причем скорость одного из них в $1\frac{5}{7}$ раза больше скорости другого. В то же время из города B в город A выехал велосипедист. Первый автобус он встретил в 10:20, а второй – в 11:00. Найдите скорость велосипедиста.
6. При каком наибольшем значении p корни уравнения $x^2 - px - 87 = 0$ являются целыми числами?

2019 год

1. Можно ли представить число 100 в виде суммы пяти различных натуральных чисел, каждое из которых делится на все меньшие его?
2. У подводного царя служат осьминоги с шестью, семью или восемью ногами. Если количество ног у осьминога четно, то он всегда говорит правду, а если нечетно – то всегда врет. Встретились как-то раз четыре осьминога. Первый сказал: “Вместе у нас 28 ног”, второй сказал: “Вместе у нас 27 ног”, третий: “Вместе у нас 26 ног”, четвертый: “Вместе у нас 25 ног”. Так сколько же у кого ног?
3. Решите уравнение:
$$\frac{6}{(x-1)(x+3)}-\frac{24}{(x-2)(x+4)}=1.$$
4. Сторона квадрата $ABCD$ равна 4. Окружность проходит через вершины C и D и касается стороны AB в точке E. Найдите радиус этой окружности.
5. Решите неравенство: $|x-3|+|x+1| \leq \left|\sqrt{5}-3\right|+\left|\sqrt{5}+1\right|$.
6. У квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$ есть два различных ненулевых корня: 1 и p. Костя изменил ровно одно из чисел: a, b или c и получил уравнение, у которого корни 2 и $3p$. Чему может быть равно p?

2020 год

1. Валера задумал натуральное число и прибавил к этому числу его сумму цифр. Леша также задумал натуральное число и тоже прибавил к нему его сумму цифр. В результате сложения у Валеры и у Леши получились одинаковые числа. Верно ли, что они задумывали одинаковые числа?

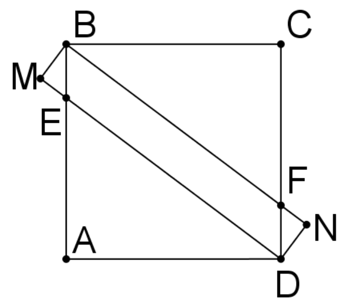
2. Решите систему уравнений: $\begin{cases} x^2 - 4y^2 = 20, \\ xy + 2y^2 = 20. \end{cases}$

3. Из горячего крана ванна заполняется за 23 минуты, из холодного - за 17 минут. Маша открыла сначала горячий кран. Через сколько минут она должна открыть холодный, чтобы к моменту наполнения ванны горячей воды налилось в 1,5 раза больше, чем холодной?

4. Дано квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$. Если из произведения корней этого уравнения вычесть их сумму, то получится 2. Если сумму корней этого уравнения поделить на их произведение, то тоже получится 2. Найдите корни этого уравнения.

5. У Маши, Ксюши, Насти и Лизы в совокупности 100 леденцов. У каждых двух девочек не менее 41 леденца. Какое наименьшее количество леденцов может быть у Лизы?

6. Квадрат $ABCD$ и прямоугольник $MBND$ имеют общую диагональ BD. MD и AB пересекаются в точке E, а BN и CD – в точке F. Площадь $EBFD$ в четыре раза меньше площади квадрата. Найдите отношение площадей квадрата и прямоугольника $MBND$.



2021 год

1. Решите неравенство $(6+x-x^2)^2+(x^3+x^2-x+2)^2 \le 0$.

2. Сравните числа $\frac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}}{1+\sqrt{3}}$ и $\sqrt{2}$.

3. Прямые CA и CB касаются некоторой окружности в точках A и B соответственно, AD – диаметр этой окружности. Прямые DB и AC пересекаются в точке E. Докажите, что C – середина AE.

4. 23 детям в детском саду показали картинку и попросили записать, что на ней изображено. Часть детей написали КЫСЯ, часть детей — МУРЛОКОТАМ, а остальные — КОТЯРКА. Букв К было написано 30, букв Я было написано 20. Сколько детей написали КЫСЯ?

5. Турист идет из одного города в другой, каждый день проходя больше, чем в предыдущий день, на одно и то же расстояние. Известно, что за первый день турист прошел 11 километров. Определите, сколько километров прошел турист за третий день, если весь путь он прошел за 6 дней, а расстояние между городами составляет 81 километр.

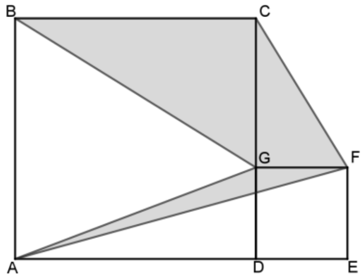
6. Решите уравнение $\frac{2x^2-7x-2}{x^2-5x+6}=\frac{2x^2-7x-2+x^2-4}{x^2-5x+6+x^2-4}$.

2022 год

1. Впишите в клетки этой таблицы цифры так, что цифра в клетке №1 – это количество различных цифр в этой таблице, цифра в клетке №2 – это количество нечетных цифр в этой таблице, цифра в клетке №3 – это сумма цифр в клетках №1 и №2, и цифра в клетке №4 – это разность цифр в клетках №1 и №2.

1	2	3	4

2. Женя задумала два натуральных числа и сказала, что их произведение равно 2280, а сумма является нечётным двузначным числом. Какие числа задумала Женя?
3. Решите уравнение $(x+4)(x+5)(x+7)(x+8)=4$.
4. На стороне CD квадрата $ABCD$ отметили точку G, на продолжении стороны AD отметили точку E так, что $DEFG$ тоже квадрат. Найдите площадь многоугольника $AFCBG$, если $AB=12$.

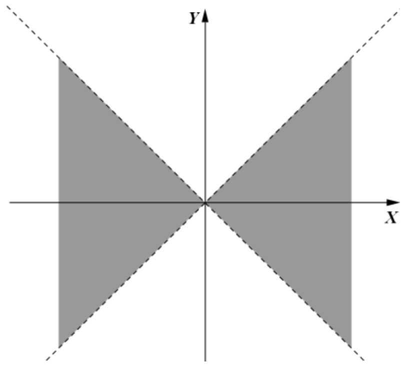


5. Дана квадратичная функция $f(x)=ax^2+bx+c$. Найдите $f(1)$, если $f\left(1+\sqrt{3}\right)=0$, $f\left(1-\sqrt{3}\right)=0$, $f\left(1+\sqrt{2}\right)=-2$.
6. В клетках квадрата 5×5 расставлены числа (не обязательно целые) так, что во всех строчках и во всех столбцах сумма чисел одинаковая. В верхнем правом квадрате 2×2 сумма чисел оказалась равной 10, а в левом нижнем квадрате 3×3 сумма оказалась равной 15. Найдите сумму всех чисел в квадрате.

Решения вступительных работ по математике

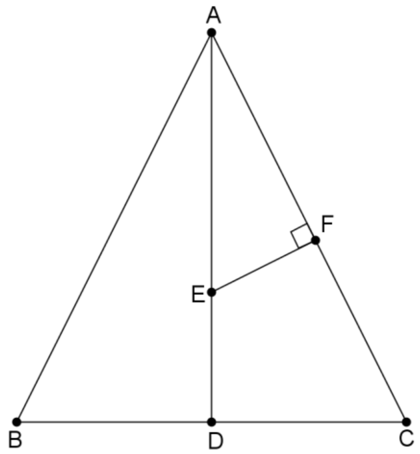
2008 год

1. Найдем ОДЗ неравенства: $x \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$. При $x = \pm 1$ неравенство выполнено, а при остальных числах из ОДЗ $\sqrt{|x|-1} > 0$. Поэтому неравенство можно привести к виду $x^2 \le 9$, откуда, с учетом ОДЗ, получаем ответ.
   Ответ: $x \in [-3; -1] \cup [1; 3]$.
2. Приведем уравнение к виду $(x-3)^2 + \frac{1}{(x-3)^2} = 2$ и произведем замену переменной $t = (x-3)^2$ $(t \ne 0)$. У полученного после замены переменной уравнения $t + \frac{1}{t} = 2$ единственный корень $t = 1$. Из уравнения $(x-3)^2 = 1$ получаем, что $x - 3 = -1$ или $x - 3 = 1$.
   Ответ: $x = 2$, $x = 4$.
3. $y^4 < x^4 \Leftrightarrow y^4 - x^4 < 0 \Leftrightarrow (y-x)(y+x)(y^2+x^2) < 0$, откуда получаем, что либо одновременно выполняются неравенства $\begin{cases} y > x \\ y < -x \end{cases}$, либо одновременно выполняются неравенства $\begin{cases} y < x \\ y > -x \end{cases}$.
   Ответ: см. рисунок.



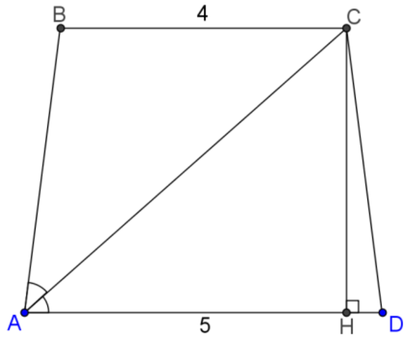
4. Пусть длина всего пути $2S$ километров. Тогда первую половину пути катер проехал за $t_1 = S/30$ часов, а вторую половину пути за $t_2 = S/10$ часов. Таким образом, весь путь катер проехал за время $t = t_1 + t_2 = 2S/15$ часов. Средняя скорость по определению равна отношению пройденного пути ко времени, за которое оно пройдено. Таким образом, $v_{средняя} = \frac{2S}{2S/15} = 15$ км/ч.
   Ответ: 15 км/ч.
5. Сделаем замену переменных: $\begin{cases} \frac{1}{x} = a \\ \frac{1}{y} = b \\ \frac{1}{z} = c \end{cases}$. Тогда система примет вид $\begin{cases} a + b = 6 \\ b + c = 4 \\ c + a = 5 \end{cases}$.
   Сложив все три уравнения, получим, что $a + b + c = 7{,}5$. Откуда: $\begin{cases} a = 3{,}5 \\ b = 2{,}5 \\ c = 1{,}5 \end{cases}$.
   Ответ: $x = \frac{2}{7}$, $y = \frac{2}{5}$, $z = \frac{2}{3}$.

6. Так как треугольник ABC равнобедренный, то центр вписанной окружности E лежит на высоте AD, проведенной к основанию BC. Опустим перпендикуляр EF на боковую сторону – он является радиусом вписанной окружности. Так как ED – тоже радиус и составляет треть от AD, то есть равен половине AE. Значит, $\frac{EF}{AE} = \frac{1}{2}$, то есть в прямоугольном треугольнике AEF катет в два раза меньше гипотенузы, значит, угол EAC равен 30°. Тогда угол при основании равен 60°.
   Ответ: 60°.



2009 год

1. По условию учителя из разных школ составили разное количество задач, поэтому есть как минимум 4 учителя, каждый из которых составил больше, чем по одной задаче – причем все разное количество (из разных четырех школ). Тогда вместе они составили как минимум $2+3+4+5=14$ задач. На долю остальных 26 человек приходится 26 задач (или меньше). Так как каждый учитель должен составить хотя бы одну задачу, то все эти 26 учителей составили по одной задаче.
Ответ: 26.



2. $\angle CAD=\angle CAB$ по условию (нетрудно увидеть, что диагональ не может быть в данном случае биссектрисой тупого угла), $\angle CAD=\angle BCA$ как накрест лежащие. Тогда ΔABC – равнобедренный, и $CD = AB = BC = 4$ см. Проведем высоту CH, тогда $HD=\dfrac{AD-BC}{2}=\dfrac{1}{2}$.
$CH^2=4^2-\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{63}{4}$ см^2, $CA=\sqrt{CH^2+AH^2}=\sqrt{\dfrac{63}{4}+\dfrac{81}{4}}=6$ см.
Ответ: диагональ равна 6 см.

3. a – корень уравнения $x^3+7x-9=0$, поэтому $a^3=9-7a$. Заменим a^3 в числителе данного выражения: $\dfrac{2a^3+3a}{11a-18}=\dfrac{2(9-7a)+3a}{11a-18}=\dfrac{18-11a}{11a-18}=-1$.
Ответ: -1.

4. Пусть x_1, x_2 – корни уравнения. Тогда по теореме Виета $x_1x_2=1-b$, $x_1+x_2=-a$.
Получаем $a^2+b^2=(x_1+x_2)^2+(1-x_1x_2)^2=x_1^2+x_2^2+2x_1x_2+1-2x_1x_2+x_1^2x_2^2=$
$=x_1^2x_2^2+x_1^2+x_2^2+1=(x_1^2+1)(x_2^2+1)$.
Так как каждый из корней не ноль, каждая из скобок – больше единицы, значит, a^2+b^2 – составное число.

5. $\left(\dfrac{x-2}{\sqrt{x}}\right)^2-5\left(\dfrac{x-2}{\sqrt{x}}\right)+4=0$. Сделаем замену переменной $t=\dfrac{x-2}{\sqrt{x}}$. Получим уравнение $t^2-5t+4=0$, откуда $t = 1$ или $t = 4$.
1 случай: $\dfrac{x-2}{\sqrt{x}}=1 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x}\right)^2-\sqrt{x}-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x}=2\\ \sqrt{x}=-1\end{array}\right. \Leftrightarrow x=4.$

2 случай:

$$\frac{x-2}{\sqrt{x}}=4 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x}\right)^2-4\sqrt{x}-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x}=2+\sqrt{6}\\ \sqrt{x}=2-\sqrt{6}\end{array}\right. \Leftrightarrow x=(2+\sqrt{6})^2=10+4\sqrt{6}.$$

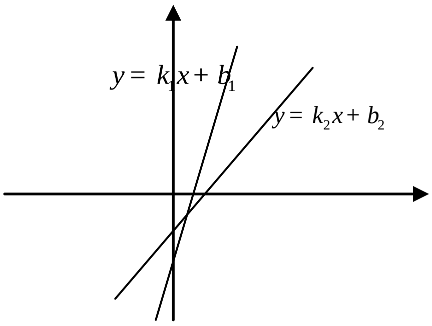
Ответ: $x=4$ или $x=10+4\sqrt{6}$.

6. $$\frac{4}{|x-1|}>1 \Leftrightarrow \begin{cases}|x-1|<4\\ |x-1|\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-4<x-1<4\\ x\neq 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-3<x<5\\ x\neq 1\end{cases}.$$

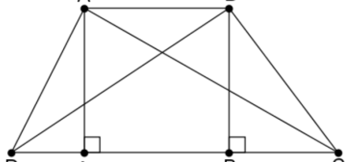
Ответ: $(-3;1)\cup(1;5)$.

2010 год

1. После произведения стандартных упрощений получаем, что $\left(\frac{2}{(2z+1)^2}-\frac{1}{1-4z^2}\right):\frac{1}{(1+2z)^2}-\frac{6z}{2z-1}=-\frac{1}{2z-1}$. Подставив в последнее выражение $z=0,75$, получим ответ.
Ответ: -2.
2. Самолет отсутствовал в столице 18 часов. За все это время на земле он находился только в Находке в течение 10 часов ($24-14$ по местному времени). Значит, остальное время – 8 часов – он летел. Тогда путь в одну сторону занял половину этого времени – 4 часа.
Ответ: 4 часа.
3. $\frac{x^2+6x+9}{(3-2x)^3(x-4)^2}\le 0 \Leftrightarrow \frac{\left(x+3\right)^2}{(x-1,5)^3(x-4)^2}\ge 0$. Решая получившееся неравенство методом интервалов, получаем ответ.
Ответ: $x\in(1,5;4)\cup(4;+\infty)\cup\{-3\}$.
4. k_1 и k_2 характеризуют угол наклона прямой. Обе прямые "возрастают", причем первая быстрее, поэтому $k_1>k_2>0$. Коэффициенты b_1 и b_2 – это ординаты пересечения соответствующих прямых с осью ординат (значение прямой при x=0). Из графика видно, что $0>b_2>b_1$. Отсюда получаем ответ.

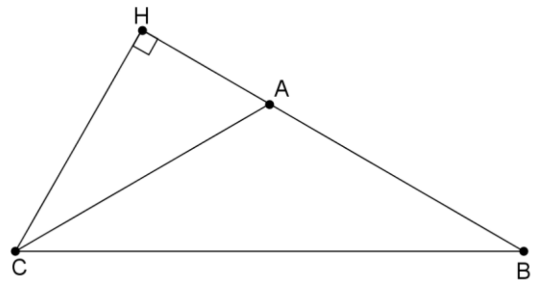


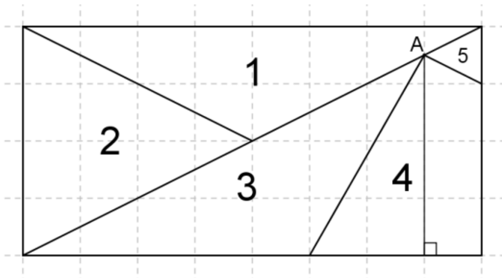
Ответ: $k_1>k_2>b_2>b_1$.
5. $\frac{\sqrt{4-3x-x^2}}{2x+3}=\frac{\sqrt{4-3x-x^2}}{5+x}\Leftrightarrow\sqrt{4-3x-x^2}\left(\frac{1}{2x+3}-\frac{1}{5+x}\right)=0$. Выражение в скобках равно 0 при $x=2$, но это значение не подходит под ОДЗ (под корнем отрицательное число); $\sqrt{4-3x-x^2}=0$ в случае, если $x=1$ или $x=-4$. Эти корни подходят и под ОДЗ (выражение в скобках определено).
Ответ: $x_1=1,\ x_2=-4$.
6. Пользуясь условием про острые углы, нарисуем трапецию. По теореме Пифагора (AA_1 и BB_1 – высоты) вычислим



$A_1C=\sqrt{AC^2-AA_1^2}=\sqrt{64-16}=4\sqrt{3}$,
$B_1D=\sqrt{DB^2-BB_1^2}=\sqrt{36-16}=2\sqrt{5}$.
Заметим также, что $AB+DC=A_1C+DB_1$. Отсюда по формуле площади трапеции, получаем:
$S=\frac{AB+DC}{2}\cdot AA_1=\frac{2\sqrt{5}+4\sqrt{3}}{2}\cdot 4=4(\sqrt{5}+2\sqrt{3})$.
Ответ: площадь трапеции равна $4(\sqrt{5}+2\sqrt{3})$.

2011 год

1. Пусть скорость катера вначале равна v, а путь равен $2S$. Тогда $\frac{2S}{v}-\left(\frac{S}{v}+\frac{S}{1,25v}\right)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{1}{10}\frac{2S}{v}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{2S}{v}=5$. Планируемое время $t=\frac{2S}{v}=5$, тогда реальное $5-0,5=4,5$ часа.
Ответ: 4,5 часа.
2. Для того, чтобы квадратичная функция проходила через данные точки, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия: $\begin{cases}2=a+b+c\\3=a-b+c\\0=c\end{cases}$, откуда $y=2,5x^2-0,5x$.
Ответ: $y=2,5x^2-0,5x$.
3. $\begin{cases}x^2y+y^2x=6\\xy+x+y=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}xy(x+y)=6\\xy+x+y=5\end{cases}$. Сделав замену переменных $x+y=u, xy=v$, получим систему $\begin{cases}uv=6\\u+v=5\end{cases}$, откуда либо $u=2, v=3$, либо $u=3, v=2$. Решив системы $\begin{cases}xy=3\\x+y=2\end{cases}$ и $\begin{cases}x+y=3\\xy=2\end{cases}$, получим ответ.
Ответ: (1,2) и (2,1).
4. Главное, на что нужно обратить внимание в этой задаче – на то, что данная высота падает на продолжение стороны. В прямоугольном треугольнике BCH гипотенуза в два раза больше катета, лежащего против угла в 30°, то есть $BC=18$. Из треугольника AHC находим $AC=6\sqrt{3}$.


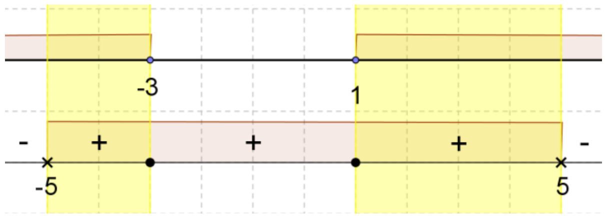
Ответ: $6\sqrt{3},\ 6\sqrt{3},\ 18$.
5. Площади частей 1 и 2 равны четвертям площади прямоугольника – по 8. Точка A – середина стороны клетки. Поэтому площадь куска 3 равна $\frac{5\cdot3\frac{1}{2}}{2}=8\frac{3}{4}$. Значит, она больше половины от половины тортика, и больше куска 4 (и, конечно, куска 5).


Можно и "честно" посчитать площади всех треугольников, умножая половину основания на высоту. При этом важно в каждом треугольнике взять удобную высоту и основание.
Ответ: самую большую площадь имеет кусок номер 3.

6. Очевидно, что подобных слагаемых после раскрытия скобок не будет. Раскроем произведение первых двух скобок. Получим всего девять слагаемых – каждое из трех слагаемых в первой скобке умножится на каждое из трех во второй. При этом получится 4 отрицательных слагаемых – это произведения одного отрицательного из первой и 2 положительных из второй (итого 2), и произведение 2 положительных из первой на один отрицательный во второй (еще 2). Оставшиеся 5 – положительные. Аналогично, после умножения полученных 5 положительных на 2 отрицательных в третьей скобке получим 10 отрицательных слагаемых, остальные слагаемые будут положительными. А всего слагаемых после раскрытия скобок получится $9 \cdot 2 = 18$.

   Ответ: 18 слагаемых, 10 со знаком "минус".

2012 год

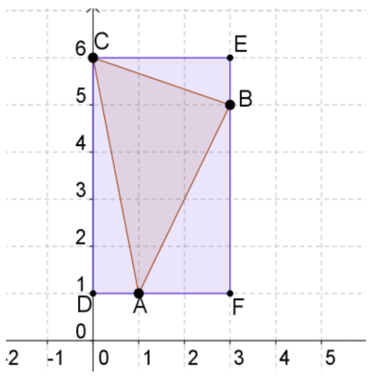
1. Неравенство выполняется тогда и только тогда, когда
$\begin{cases} 2x-3+x^2 \geq 0 \\ 25-x^2>0 \end{cases}$ или $\begin{cases} 2x-3+x^2 = 0 \\ 25-x^2 \neq 0 \end{cases}$.
Решение первой системы можно увидеть на рисунке:


Решение второй системы ничего не добавляет к ответу.
Ответ: $x \in (-5;\,-3] \cup [1;5)$.

2. Заметим, что $9\sqrt{3}-3\sqrt{27}=9\sqrt{3}-9\sqrt{3}=0$.
Также $\sqrt{7}<\sqrt{16} \;\Rightarrow\; \sqrt{7}<4 \;\Rightarrow\; \sqrt{7}-4<0$.
$2\sqrt{19}=\sqrt{4\cdot 19}=\sqrt{76};\;\; 5\sqrt{3}=\sqrt{75}; \sqrt{76}>\sqrt{75}>0 \quad\Rightarrow\quad 2\sqrt{19}>5\sqrt{3}>0$.
Ответ: $\sqrt{7}-4<9\sqrt{3}-3\sqrt{27}<5\sqrt{3}<2\sqrt{19}$.

3. Раз произведение данных чисел равно 1000, то в их разложение на простые множители могут входить только 2 и 5, причем не одновременно (иначе число будет делиться на 10). Это означает, что одно из чисел равно 5^3, а второе 2^3, и тогда их сумма равна $125+8=133$.
Ответ: 133.

4. Обозначим за x время (в минутах), которое потребовалось Пете, чтобы вспомнить о ручке. Если Петя будет возвращаться за ручкой, то придет в школу на 10 минут позже, чем если бы он не возвращался (3 мин до звонка + 7 мин после звонка), или, что то же самое, на $2x$ минут позже (ему придется потратить два раза по x минут – на путь до дома и обратно до точки просветления). Таким образом, $2x=10$; $x=5$. Весь путь занимает 20 минут, вспомнил он о ручке через 5 минут, значит, прошел к этому времени $\frac{5}{20}=\frac{1}{4}$ пути.
Ответ: $\frac{1}{4}$ пути.

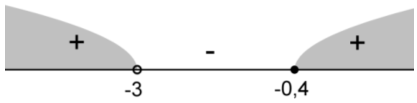
5. Заметим, что


$S_{ABC}=S_{DCEF}-S_{DCA}-S_{CEB}-S_{BFA}=$
$=5\cdot 3-\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 1-\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 1-\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 2=$
$=15-2{,}5-1{,}5-4=7$.
Ответ: площадь треугольника ABC равна 7.

6. $x^2-2xy+2y^2+1=x^2-2xy+y^2+y^2+1=(x-y)^2+y^2+1\geq 1$, так как квадраты неотрицательны. При этом при $x=y=0$ (когда оба квадрата равны 0) значение выражения как раз равно 1.
Ответ: наименьшее значение выражения равно 1, оно достигается при $x=y=0$.

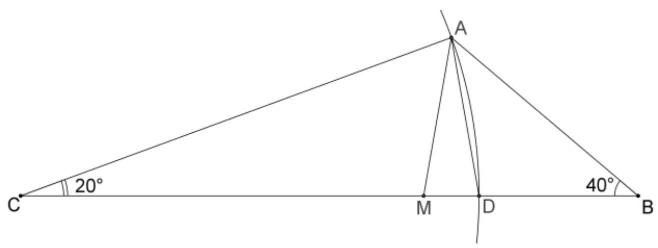
2013 год

1. Пусть у Вани x конфет, а у Маши y конфет. Значит, $x-y=90$. После обмена у них стало $\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}y$ и $\frac{2}{3}y+\frac{1}{3}x$ соответственно. Тогда их разность стала равна $\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}y-\left(\frac{2}{3}y+\frac{1}{3}x\right)=\frac{1}{3}(x-y)=30$.
   Ответ: на 30 конфет.
2. $\sqrt{0{,}04}-\left(\sqrt{7}-2\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{8}+\sqrt{7}\right)=0{,}2-\left(\sqrt{7}-\sqrt{8}\right)\left(\sqrt{8}+\sqrt{7}\right)=0{,}2+1=1{,}2$.
   $1{,}2=\frac{6}{5}=1+\frac{1}{5}>1+\frac{1}{6}=\frac{7}{6}$.
   Ответ: на 30 конфет.
3. $\frac{7x+3}{x+3}\geq-\frac{x}{2(x+3)}\ \Leftrightarrow\ \frac{2(7x+3)+x}{2(x+3)}\geq 0\ \Leftrightarrow\ \frac{15x+6}{2(x+3)}\geq 0\ \Leftrightarrow\ \frac{15(x+0{,}4)}{2(x+3)}\geq 0$.



   Ответ: $(-\infty;-3)\cup[-0{,}4;+\infty)$.
4. Сумма квадратов чисел равна нулю тогда и только тогда, когда каждое слагаемое равно нулю. Значит, данное уравнение равносильно системе $\begin{cases}\frac{-3x+y+4}{2}=0\\ \frac{x+3y-1}{5}=0\end{cases}$.
   Решим эту систему:
   $\begin{cases}-3x+y+4=0\\ x+3y-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=3x-4\\ x+3y-1=0\end{cases}\Leftrightarrow$
   $\Leftrightarrow\begin{cases}y=3x-4\\ x+3(3x-4)-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=3x-4\\ 10x-13=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=-0{,}1\\ x=1{,}3\end{cases}$.
   Ответ: $(1{,}3;-0{,}1)$.
5. Преобразуем равенство $a^2+b=b^2+a\ \Leftrightarrow\ a^2-b^2-(a-b)=0\ \Leftrightarrow$
   $\Leftrightarrow\ (a-b)\big((a+b)-1\big)=0$. Очевидно, что любая пара различных чисел, в сумме дающих 1, подходит. Например, $a=\frac{1}{3}$ и $b=\frac{2}{3}$.
   Ответ: выиграл Анатолий Алексеевич.

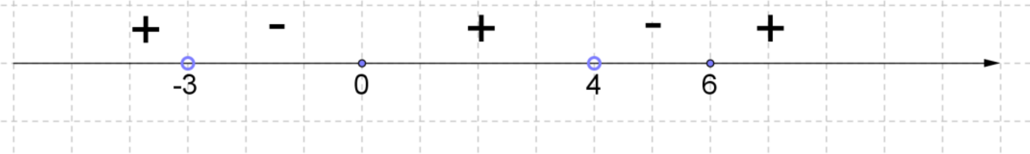
6. Отложим отрезок CD, равный AC, на луче CB. Так как $\angle CAB$ тупой, то $CB>AC$, значит, точка D лежит на отрезке CB. Теперь надо найти длину отрезка BD.



   $\Delta\,ACD$ равнобедренный, значит, $\angle CAD=\angle CDA=\frac{180°-20°}{2}=80°$.
   $\Delta\,AMD$ − также равнобедренный с основанием MD $(\angle AMD=180°-\angle MAB-\angle MBA=80°=\angle ADM)$, поэтому $AD=AM=2$.
   Наконец, $\angle DAB=\angle CAB-\angle CAD=120°-80°=40°$. Значит, треугольник ABD − равнобедренный с основанием AB, и $BD=AD=2$.
   Ответ: разность длин отрезков BC и AC равна 2.

2014 год

1. $\frac{5x-12}{x^2-x-12} \le 1 \Leftrightarrow \frac{5x-12-x^2+x+12}{x^2-x-12} \le 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-6x}{x^2-x-12} \ge 0 \Leftrightarrow \frac{x(x-6)}{(x-4)(x+3)} \ge 0.$



Ответ: $(-\infty; -3) \cup [0; 4) \cup [6; +\infty)$.

2. Не может быть двух команд, которые не выиграли ни одного матча (ведь они должны были играть друг с другом!). Значит, такая команда ровно одна, и она составляет 25%. Значит, всего команд 4.
Ответ: 4 команды.

3. Преобразуем уравнение:
$\left(1+\frac{2}{x}\right)\left(1+\frac{3}{x}\right)(x+4)(x+6) = 12 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \left(\left(1+\frac{3}{x}\right)(x+4)\right)\left(\left(1+\frac{2}{x}\right)(x+6)\right) = 12 \Leftrightarrow \left(x+\frac{12}{x}+7\right)\left(x+\frac{12}{x}+8\right) = 12.$
Сделаем замену переменной: $t = x + \frac{12}{x} + 7$. Получим уравнение $t(t+1) = 12$. Его корни 3 и (-4). Обратная замена приводит к уравнениям $x + \frac{12}{x} + 7 = 3$ и $x + \frac{12}{x} + 7 = -4$. Первое уравнение приводится к равносильному уравнению $x^2 + 4x + 12 = 0$, и у него нет корней.
Второе уравнение приводится к равносильному уравнению $x^2 + 11x + 12 = 0$, и его корни $x = \frac{-11\pm\sqrt{73}}{2}$.
Ответ: $\frac{-11\pm\sqrt{73}}{2}$.

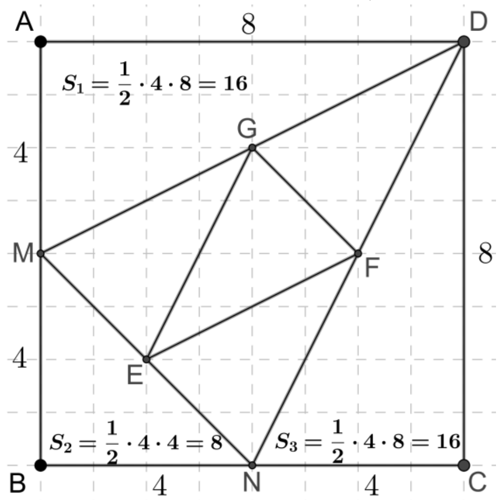
4. При делении получаем периодическую дробь $\frac{1}{42} = 0.0(238095)$:

```
_ 1, 0  0  0  0  0  0  0 | 4 2
     8  4                 |-----------------------
     ----                 | 0, 0 2 3 8 0 9 5…
   _ 1  6  0              |
     1  2  6
     -------
      _ 3  4  0
        3  3  6
        -------
         _ 4  0  0
           3  7  8
           -------
            _2  2  0
             2  1  0
             -------
             _ 1  0  0
                  8  4
```

Длина периода составляет 6 разрядов, при этом $2014 = 6 \cdot 335 + 4 =$
$= 1$(первый 0 после запятой) $+ 6 \cdot 335$(335 периодов) $+ 3$(еще три цифры периода).

Значит, на 2014 месте стоит третья цифра периода, т.е. цифра 8. После вычеркивания и сдвигания все первые 2013 цифр после запятой остались прежними, а на 2014 месте цифра уменьшилась – стала 0. Значит, число уменьшилось.

Ответ: первоначальное число больше.



5. Треугольник EGF образован средними линиями треугольника DMN. Значит, площадь ΔEGF составляет четверть площади ΔDMN. Площадь ΔDMN равна разности площади квадрата и $(S_1 + S_2 + S_3)$ (см. рисунок). Итак, площадь ΔDMN равна $8 \cdot 8 - 16 - 16 - 8 = 24$. Тогда площадь ΔEGF: $\frac{24}{4} = 6$.

   Ответ: искомая площадь 6.

6. *Решение 1*. Так как $x = 0$ – не корень уравнения $cx^2 + bx + a = 0$, то можем в этом уравнении обе части разделить на x^2 и получить равносильное уравнение (то есть с теми же корнями): $c + b\left(\frac{1}{x}\right) + a\left(\frac{1}{x}\right)^2 = 0$. Сделав замену переменной $\frac{1}{x} = t$, получим уравнение $at^2 + bt + c = 0$, корнями которого по условию являются числа 2 и 3. Отсюда у уравнения $c + b\left(\frac{1}{x}\right) + a\left(\frac{1}{x}\right)^2 = 0$ (а значит, и у уравнения $cx^2 + bx + a = 0$) корни равны $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}$.

   Решение 2. По теореме Виета, коэффициенты первого уравнения связаны соотношениями $\frac{b}{a} = -5$, $\frac{c}{a} = 6$. Отсюда $\frac{b}{c} = -\frac{5}{6}$, $\frac{a}{c} = \frac{1}{6}$. Получаем:

   $cx^2 + bx + a = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{b}{c}x + \frac{a}{c} = 0 \Leftrightarrow x^2 - \frac{5}{6}x + \frac{1}{6} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ или $x = \frac{1}{3}$.

   Ответ: $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}$.

2015 год

1. $(x-4)\sqrt{x^2-7x+10} \geq 0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{c}x-4 \geq 0\\ x^2-7x+10=0\end{array}\right.\\ x^2-7x+10 \geq 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x \geq 4\\ x=2\\ x=5\end{array}\right.\\ x \in (-\infty; 2] \cup [5; +\infty)\end{array}\right. \Leftrightarrow$

   $\Leftrightarrow \quad x \in [5; +\infty) \cup \{2\}.$

   Ответ: $x \in [5; +\infty) \cup \{2\}$.

2. Сделаем замену переменной: $t = \frac{x-3}{(x-1)(x-4)}$.

   Тогда $t + \frac{1}{t} = \frac{5}{2} \;\Leftrightarrow\; \frac{2t^2-5t+2}{2t} = 0 \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{c}2t^2-5t+2=0\\ t\neq 0\end{array}\right. \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{ll}t=2 & (1)\\ t=\frac{1}{2} & (2)\end{array}\right.$.

   Теперь вернемся к исходной переменной:

   (1): $\frac{x-3}{(x-1)(x-4)} = 2 \;\Leftrightarrow\; \frac{x-3-2(x-1)(x-4)}{(x-1)(x-4)} = 0$

   $\Leftrightarrow\; \frac{x-3-2x^2+10x-8}{(x-1)(x-4)} = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{-2x^2+11x-11}{(x-1)(x-4)} = 0;$

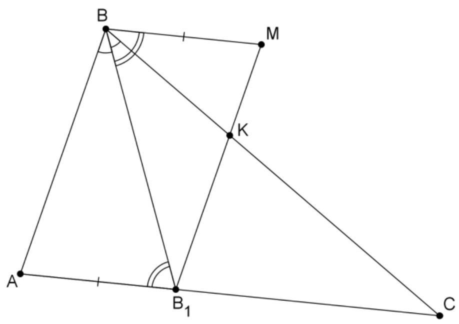
   $D = 11^2 - 4\cdot 2\cdot 11 = 11\cdot 3 = 33; \quad x_{1,2} = \frac{11\pm\sqrt{33}}{4}.$

   (2): $\frac{x-3}{(x-1)(x-4)} = \frac{1}{2} \;\Leftrightarrow\; \frac{2(x-3)-(x-1)(x-4)}{2(x-1)(x-4)} = 0 \;\Leftrightarrow$

   $\Leftrightarrow\; \frac{2x-6-x^2+5x-4}{2(x-1)(x-4)} = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{-x^2+7x-10}{(x-1)(x-4)} = 0;\; x_{3,4} = 2;\; 5.$

   Ответ: $\left\{\frac{11-\sqrt{33}}{4};\; 2;\; \frac{11+\sqrt{33}}{4};\; 5\right\}$.

3. Углы $\angle MBB_1$и $\angle BB_1A$ являются накрест лежащими при прямых BM и AC и секущей BB_1. Если накрест лежащие углы равны, то прямые параллельны, т.е. $BM \parallel AB_1$. Кроме того, по условию $BM = AB_1$, значит $ABMB_1$ – параллелограмм (по признаку).

   В параллелограмме противоположные стороны параллельны, значит, $AB \parallel MB_1$. Тогда накрест лежащие углы при этих прямых и секущей BB_1 равны: $\angle MB_1B = \angle B_1BA$. Кроме того, $\angle KBB_1 = \angle B_1BA$ (BB_1 – биссектриса), тогда $\angle KB_1B = \angle KBB_1$, значит ΔKBB_1 – равнобедренный, причем $KB = KB_1$. **Что и требовалось доказать.**

4. Если сложить количество дождливых вечеров (v_d) с количеством вечеров без дождей (v), то получится общее количество дней в походе (d). Аналогично, если сложить количество дождливых утр (u_d) с количеством недождливых (u), то тоже получится общее количество дней. Значит $v + v_d + u_d + u = 2d$. По условию, $v = 11$ (вечера без дождя), $u = 16$ (утра без дождя), и $v_d + u_d = 11$ (утренние и вечерние дожди – это все дожди). Тогда $11 + 11 + 16 = 38 = 2d$, $d = 19$.

   Ответ: поход длился 19 дней.

5. Вспомним, что $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1$. Разделим это равенство на 2015:
$\frac{1}{4030}+\frac{1}{6045}+\frac{1}{12090}=\frac{1}{2015}$.
Ответ: $n=4030,\ m=6045,\ t=12090$.

6. Приведем это неравенство к более удобному виду:
$\frac{ax^2+5x+11-x^2-3x-10}{x^2+3x+10}>0 \Leftrightarrow \frac{(a-1)x^2+2x+1}{x^2+3x+10}>0$.
Вычислим дискриминант трехчлена в знаменателе $D=9-40=-31$. У этого трехчлена нет корней, а старший коэффициент больше 0, значит, знаменатель нашей дроби всегда положителен. Таким образом, нам необходимо, чтобы неравенство $(a-1)x^2+2x+1>0$ было выполнено для всех x, кроме одного.
Если $a=1$, у нас получается линейное неравенство $2x+1>0$, которое выполнено при всех $x>-0{,}5$, а это нам не подходит.
Если $a\neq 1$, мы имеем дело с квадратным неравенством. Графиком квадратичной функции является парабола. Нам нужно, чтобы все точки этой параболы, кроме одной, находились выше оси OX, т.е. чтобы вершина параболы лежала на оси OX, а ветви параболы были направлены вверх. Тогда получаем следующие условия:
$\begin{cases} a-1>0 \\ D=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>1 \\ 4-4(a-1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>1 \\ a=2 \end{cases}.$
Ответ: $a=2$.

2016 год

1. Условие равносильно системе $\begin{cases} f(x) > x \\ g(x) > x \end{cases}$.

   Решим по отдельности каждое неравенство.

   $x^2 - 3x > x \iff x^2 - 4x > 0 \iff x(x-4) > 0 \iff x \in (-\infty; 0) \cup (4; +\infty)$.

   $-\frac{1}{x+2} > x \iff x + \frac{1}{x+2} < 0 \iff \frac{x^2+2x+1}{x+2} < 0 \iff x \in (-\infty; -2)$.

   Пересекая множества, получаем $x \in (-\infty; -2)$.

   Ответ: $x \in (-\infty; -2)$.

2. $\frac{ax^2+2x-3}{x-1} = 0 \iff \begin{cases} ax^2 + 2x - 3 = 0 \\ x - 1 \neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} ax^2 + 2x - 3 = 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$

   Уравнение $ax^2 + 2x - 3 = 0$ при $a = 0$ становится линейным и имеет единственный корень, так как $2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$. Кроме того, $\frac{3}{2} \neq 1$. Таким образом, $a = 0$ – одно из искомых значений параметра.

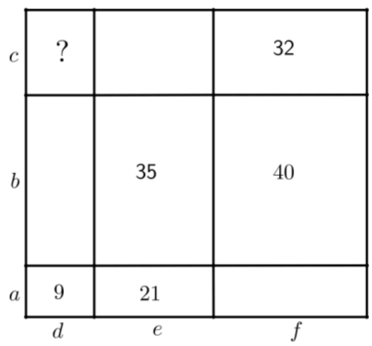
   Далее, рассмотрим $a \neq 0$. Найдем дискриминант квадратного уравнения $ax^2 + 2x - 3 = 0$ и те значения параметра, при которых дискриминант обращается в ноль. $D = 4 + 12a$; $4 + 12a = 0 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{3}$. При этом значении параметра корень рассматриваемого квадратного уравнения равен $3 \neq 1$, таким образом, $a = -\frac{1}{3}$ – еще одно из искомых значений параметра.

   Наконец, пусть у квадратного уравнения $ax^2 + 2x - 3 = 0$ будет два различных корня, один из которых будет равен 1. Тогда у уравнения $\frac{ax^2+2x-3}{x-1} = 0$ будет единственный корень. Так как в этом случае 1 – корень уравнения $ax^2 + 2x - 3 = 0$, то $a \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 - 3 = 0 \Leftrightarrow a = 1$. При этом второй корень отличен от 1 (дискриминант больше 0). Таким образом, $a = 1$ – очередное искомое значение параметра.

   Так как квадратное уравнение не может иметь более двух действительных решений, то мы рассмотрели все случаи. В итоге, уравнение $\frac{ax^2+2x-3}{x-1} = 0$ имеет единственное решение при $a = -\frac{1}{3}$; $a = 0$; $a = 1$.

   Ответ: $a = -\frac{1}{3}$; $a = 0$; $a = 1$.

3. а) Обозначим на чертеже, для удобства, равные друг другу отрезки буквами a, b, c, d, e и f.

   Разность периметров двух верхних прямоугольников в правом столбце равна $2(b - c)$, также как и разность периметров двух верхних прямоугольников во втором столбце. Таким образом, периметр верхнего прямоугольника во втором столбце равен $35 - (40 - 32) = 27$.

   Аналогично, периметры двух левых прямоугольников в нижнем ряду, как и периметры двух левых прямоугольников в верхнем ряду, различаются на $2(e - d)$, значит, периметр левого верхнего прямоугольника равен $27 - (21 - 9) = 15$.

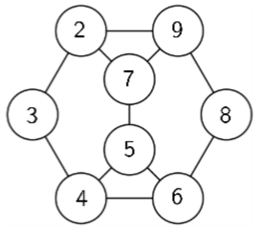
б) Сумма периметров прямоугольников на главной диагонали равна $2(a+d)+2(b+e)+2(c+f)=2(a+d+b+e+c+f)=9+35+32=76$. Периметр квадрата тоже равен $2(a+b+c+d+e+f)=76$.
Ответы: а) 15; б) 76.

4. Обозначим количество колонн на станции x. Тогда количества оставшихся колонн для учеников равны $x-15, x-12, x-7$ (очевидно, они расположены по возрастанию). Какие-то два из них связаны равенством $3a=b$. Возможны три варианта $3(x-15)=x-7$, $3(x-15)=x-12$, $3(x-12)=x-7$. Из первого варианта получаем $x=19$, второй и третий дают не целое значение количества колонн на станции. Таким образом, оставшийся ученик насчитал $x-12=7$ колонн.
Ответ: 7 колонн.

5. Возрасты супругов отличаются на 5, значит они разной четности, и их сумма нечетна. Тогда все перечисленные пары в условии – не супруги. Наталья замужем за Петром – он единственный не "невозможный" супруг. Судьба Василия – Анна, а не Ирина, с которой у него всего год разницы. Тогда Семен женат на Ирине. Найдем теперь возраст каждого из них. Пусть возраст Натальи – x. Тогда возрасты оставшихся героев таковы:
Петр – $(x+5)$, Василий – $(48-x)$, Анна – $(43-x)$, Семен – $(52-x)$, Ирина – $(47-x)$. Получаем уравнение:
$x+(x+5)+(48-x)+(43-x)+(52-x)+(47-x)=151$, откуда $x=22$.
Ответ: Семейные пары такие: Наталья и Петр (22 и 27 лет); Анна и Василий (21 и 26 лет); Ирина и Семен (25 и 30 лет).

6. Пусть число 51,2 увеличивали на $p\%$. Тогда после первого увеличения число стало таким: $51{,}2\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)$. После второго – $51{,}2\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)^2$, после третьего $51{,}2\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)^3$. Если некоторое число X уменьшают на то же число процентов, то оно становится таким: $X\cdot\left(1-\frac{p}{100}\right)$. Значит, в нашем случае после троекратного уменьшения числа $51{,}2\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)^3$ на $p\%$ получим число $51{,}2\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)^3\cdot\left(1-\frac{p}{100}\right)^3$. По условию задачи значение этого выражения равно 21,6. Получаем уравнение:
$51{,}2\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)^3\cdot\left(1-\frac{p}{100}\right)^3=21{,}6$.
Решим его:
$51{,}2\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)^3\cdot\left(1-\frac{p}{100}\right)^3=21{,}6 \Leftrightarrow 51{,}2\cdot\left(1-\frac{p^2}{100^2}\right)^3=21{,}6 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \left(1-\frac{p^2}{100^2}\right)^3=\frac{216}{512} \Leftrightarrow 1-\frac{p^2}{100^2}=\frac{6}{8} \Leftrightarrow 1-\frac{p^2}{100^2}=\frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{p^2}{100^2}=\frac{1}{4} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (p>0)\ \frac{p}{100}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow p=50$.
Ответ: на 50%.

2017 год

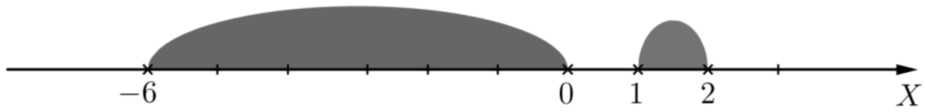


1. **Ответ:** (*Возможны и другие варианты решения*.)

2. Преобразуем неравенство:

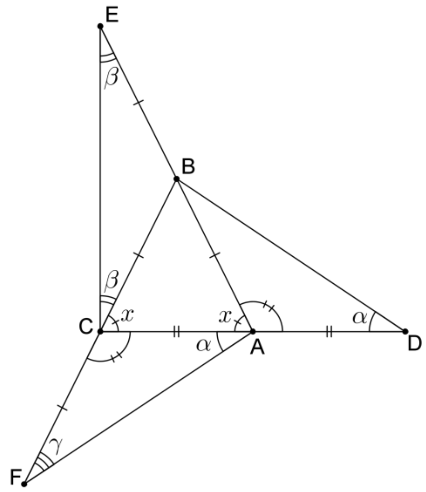
$$\frac{7}{(x-1)(x-2)}+\frac{9}{x-2}+1<0 \Leftrightarrow \frac{7+9x-9+x^2-3x+2}{(x-1)(x-2)}<0 \Leftrightarrow$$
$$\frac{x^2+6x}{(x-1)(x-2)}<0.$$

Применим метод интервалов:



Ответ: $(-6;0)\cup(1;2)$.

3. Обозначим углы, сумму которых надо найти, $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ (смотри рисунок).



1) $\angle BCE=\beta$, т.к. ΔCBE – равнобедренный ($CB=BA=BE$).
2) Пусть $\angle BCA=\angle BAC=x$. Тогда углы BAD и ACF равны как смежные равным.
3) Из ΔACE: $2(x+\beta)=180° \Rightarrow x+\beta=90°$.
4) $\Delta DAB=\Delta ACF$ по двум сторонам и углу между ними, значит $\angle CAF=\angle BDA=\alpha$.
5) $\alpha+\gamma=x$ (как сумма внутренних углов ΔACF, не смежных с внешним $\angle ACB$).
6) Из пунктов 3) и 5) получаем: $\alpha+\beta+\gamma=90°$.

Ответ: $90°$.

4. Заметим, что при раскрытии скобок знаки будут чередоваться: минусы появятся при четных числах, а плюсы – при нечетных.

$$1-\Big(2-\Big(3-\big(\ldots\big(2015-\big(2016-(2017-x)\big)\big)\ldots\big)\Big)\Big)=1000 \Leftrightarrow$$
$$1-2+3-4+\cdots+2015-2016+2017-x=1000 \Leftrightarrow$$
$$-1\cdot 1008+2017-x=1000 \Leftrightarrow$$
$$x=9.$$

Ответ: 9.

5. Пусть первый спутник сделал x оборотов, тогда второй и третий – $(x-80)$ и $(x-100)$. Когда же второй сделал x оборотов, третий сделал $(x-25)$. Поскольку отношение скоростей сохранилось, отношения пройденных путей тоже. Составим уравнение:

$$\frac{x-80}{x-100}=\frac{x}{x-25} \Leftrightarrow x^2-105x+80\cdot 25=x^2-100x \Leftrightarrow 5x=80\cdot 25 \Leftrightarrow$$
$$x=400.$$

Ответ: 400.

6. Преобразуем уравнение:

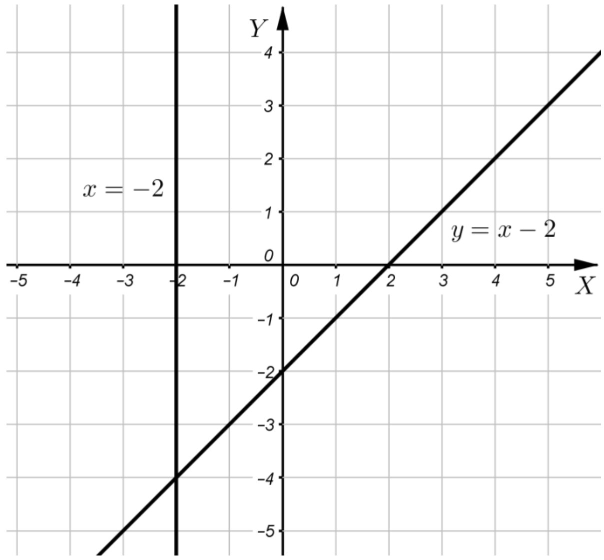
$$y(x+2) = x^2 - 4 \Leftrightarrow$$

$$y(x+2) - (x^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x+2)\big(y - (x-2)\big) = 0 \Leftrightarrow$$

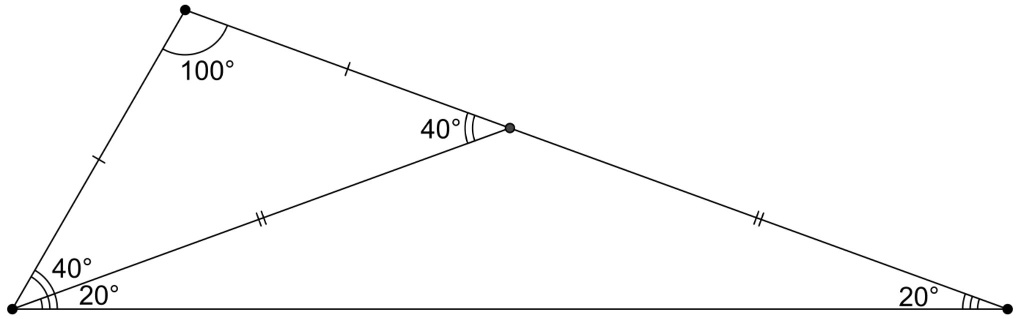
$$\left[\begin{array}{l} x + 2 = 0, \\ y - (x-2) = 0. \end{array}\right.$$

Изобразим множества $x = -2$ и $y = x - 2$.

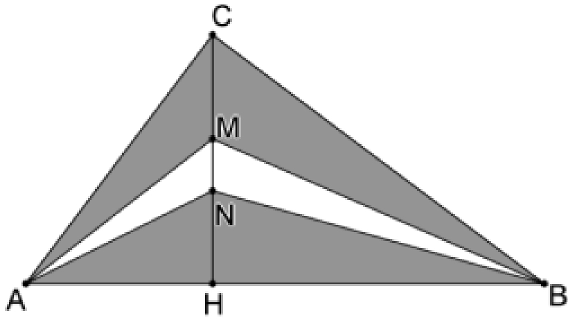


2018 год

1. **Ответ:**

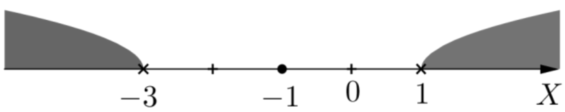


2. По теореме Пифагора:
   $AB = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10.$
   Найдем площадь ΔABC двумя способами:
   во-первых, $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24$;
   во-вторых, $S_{ABC} = 19 + S_{AMBN} =$
   $= 19 + \frac{1}{2} \cdot AH \cdot MN + \frac{1}{2} \cdot BH \cdot MN =$
   $= 19 + \frac{1}{2} MN \cdot (AH + BH) =$
   $= 19 + \frac{1}{2} MN \cdot AB = 19 + \frac{1}{2} MN \cdot 10 = 19 + 5 \cdot MN.$
   Отсюда $24 = 19 + 5 \cdot MN$, т.е. $MN = 1$.
   Ответ: $MN = 1$.



3. Вычтем из первого уравнения второе. Получим:
   $a^2 - b^2 = b - a \Leftrightarrow (a - b)(a + b) = b - a \Leftrightarrow (a - b)(a + b + 1) = 0.$
   Рассмотрим случай $a = b$. Тогда $a^2 - 1 = a$, $a = b = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.
   Рассмотрим случай $a + b = -1$. Тогда $a^2 - 1 = -a - 1$, откуда $a = 0$, $b = -1$ или $a = -1$, $b = 0$.
   Ответ: $a = b = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ или $a = 0, b = -1$ или $a = -1, b = 0$.

4. Проведем равносильные преобразования:
$$\frac{1}{x+3} - \frac{1}{x-1} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{x - 1 - x - 3 - (x+3)(x-1)}{(x+3)(x-1)} \leq 0 \Leftrightarrow$$
$$\frac{-x^2 - 2x - 1}{(x+3)(x-1)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(x+1)^2}{(x+3)(x-1)} \geq 0.$$
   Воспользуемся методом интервалов:



   Ответ: $(-\infty; -3) \cup \{-1\} \cup (1; +\infty)$.

5. Пусть x км/ч – скорость велосипедиста. Тогда до встречи с "быстрым" автобусом он успел проехать $\frac{4}{3}x$ км, а до встречи с "медленным" – $2x$ км. $\left(100 - \frac{4}{3}x\right)$ км – расстояние, пройденное "быстрым" автобусом до встречи с велосипедистом; а $(100 - 2x)$ км – расстояние, пройденное "медленным" автобусом до встречи с велосипедистом. Тогда скорость "быстрого" автобуса $\frac{100-\frac{4}{3}x}{\frac{4}{3}}$ км/ч, а скорость "медленного" – $\frac{100-2x}{2}$ км/ч. Запишем известное нам отношение скоростей автобусов:
$$\frac{100-\frac{4}{3}x}{\frac{4}{3}} = \frac{12}{7} \cdot \frac{100-2x}{2} \Leftrightarrow 7 \cdot (300 - 4x) = 24(100 - 2x) \Leftrightarrow$$
$$20x = 300 \Leftrightarrow x = 15.$$
Ответ: 15 км/ч.

6. По теореме Виета произведение корней равно (-87). Корни уравнения – целые. Запишем все возможные произведения целых чисел, дающие (-87): $-87 = 1 \cdot (-87) = (-1) \cdot 87 = 3 \cdot (-29) = (-3) \cdot 29$.
По теореме Виета сумма корней равна p. Наибольшее значение p как суммы двух чисел с разным знаком достигается при наибольшем положительном корне и наименьшем по модулю отрицательном: $p = 87 + (-1) = 86$.
Заметим, что 87 и (-1) – корни уравнения $x^2 - 86x - 87 = 0$ по обратной теореме Виета.
Ответ: $p = 86$.

2019 год

1. Например, $60+30+6+3+1=100$ или $72+18+6+3+1=100$.
Ответ: Можно.

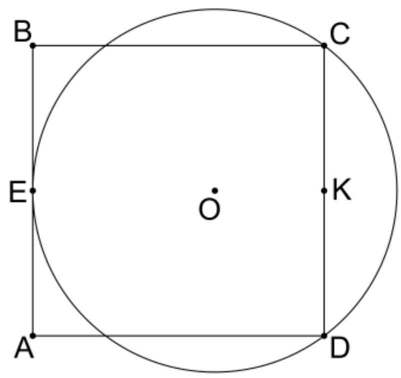
2. Если бы все четыре осьминога имели по 7 ног, то один из них произнес бы истинное утверждение “Вместе у нас 28 ног”, что противоречит условию задачи. Следовательно, среди них есть хотя бы один осьминог с четным числом ног. Поскольку все названные числа различны, правдой может быть только одно из высказываний. Таким образом, среди четырех осьминогов один с четным числом ног и три с нечетным. Возможное количество ног – 25 или 27. Но 25 не реализуемо (ног не меньше, чем $7+7+7+6$), а $27=6+7+7+7$. Действительно, шестиногий назвал верную сумму 27, а остальные – оставшиеся неверные три суммы.
Ответ: 6 – 7 – 7 – 7.

3. Раскроем скобки в знаменателе: $\frac{6}{x^2+2x-3}-\frac{24}{x^2+2x-8}=1.$ $(*)$ Обозначим $x^2+2x-8=t$ и решим вспомогательное уравнение $\frac{6}{t+5}-\frac{24}{t}=1.$ $(**)$

$$(**)\Leftrightarrow\begin{cases}6t-24t-120=t(t+5),\\ t+5\neq 0,\\ t\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t^2+23t+120=0,\\ t\neq -5,\\ t\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}t=-15,\\ t=-8,\end{array}\right.\\ t\neq -5,\\ t\neq 0.\end{cases}$$

Корни системы -15 и -8, поэтому $(*)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2+2x-8=-8,\\ x^2+2x-8=-15.\end{array}\right.$ Корни первого уравнения -2 и 0, а второе уравнение корней не имеет.
Ответ: $\{-\mathbf{2};\mathbf{0}\}$**.**

4. Пусть точка O – центр указанной в условии окружности. Точка O равноудалена от вершин C и D квадрата, поэтому она лежит на серединном перпендикуляре к стороне квадрата CD, проходящем через точку K – середину стороны CD. Этот серединный перпендикуляр, проходящий через точки K и O, также перпендикулярен стороне квадрата AB. Поскольку окружность касается AB в точке E, то



радиус OE перпендикулярен AB и, тем самым, лежит на прямой KO. Рассмотрим теперь треугольник KOC. Это прямоугольный треугольник с гипотенузой OC, равной r – радиусу заданной окружности и катетами $CK=2$ и $KO=|4-r|$.

Напишем теорему Пифагора для этого треугольника: $r^2 = 2^2 + |4 - r|^2$. После преобразований $r^2 = 4 + 16 - 8r + r^2 \Leftrightarrow 8r = 20$ найдем $r = \frac{5}{2}$.

Примечание. После вычислений стало понятно, что точка O лежит внутри квадрата.

Ответ: $\mathbf{2,5}$.

5. Поскольку $\sqrt{5} < 3$, правая часть неравенства равна $3 - \sqrt{5} + \sqrt{5} + 1 = 4$, и первоначальное неравенство равносильно неравенству $|x - 3| + |x + 1| \leq 4$. $(*)$ Решим его двумя способами:

   Способ 1 (геометрический): На вещественной прямой заданы две точки: -1 и 3. Нужно найти все точки x такие, что сумма расстояний от x до точек -1 и 3 не превосходит 4. Очевидно, что если x лежит в промежутке $[-1; 3]$, то сумма расстояний равна 4, а если x находится вне этого промежутка, то сумма расстояний больше 4.

   Способ 2: Воспользуемся определением модуля: $|x - 3| = \begin{cases} x - 3, \text{если } x \geq 3, \\ -x + 3, \text{если } x < 3 \end{cases}$ и $|x + 1| = \begin{cases} x + 1, \text{если } x \geq -1, \\ -x - 1, \text{если } x < -1. \end{cases}$ Разобьем вещественную прямую точками -1 и 3 на три части и рассмотрим три случая.

   I) $x \geq 3$. Тогда на этом промежутке $(*) \Leftrightarrow x - 3 + x + 1 \leq 4 \Leftrightarrow x \leq 3$, так что $x = 3$ входит в ответ.

   II) $-1 \leq x < 3$. Тогда на этом промежутке $(*) \Leftrightarrow -x + 3 + x + 1 \leq 4 \Leftrightarrow 4 \leq 4$, так что весь промежуток $[-1; 3)$ входит в ответ.

   III) $x < -1$. Тогда на этом промежутке $(*) \Leftrightarrow -x + 3 - x - 1 \leq 4 \Leftrightarrow x \geq -1$, так что на этом промежутке решений нет.

   Ответ: $[\mathbf{-1; 3}]$.

6. Запишем второе уравнение $a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0$. Заметим, что из условия задачи следует, что a, a_1, c, c_1 не равны 0. Из теоремы Виета для первого уравнения следует, что $p = \frac{c}{a}$, а для второго уравнения – что $6p = \frac{c_1}{a_1}$, то есть $\frac{c}{a} \neq \frac{c_1}{a_1}$. Значит, Костя изменил первый или третий коэффициент, а второй оставил без изменений и $b_1 = b$. Рассмотрим два случая:

   1) Костя изменил первый коэффициент, а $c_1 = c$. Тогда $p = \frac{c}{a} = \frac{c}{6a_1}$, откуда $a_1 = \frac{a}{6}$ и уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ и $\frac{a}{6}x^2 + bx + c = 0$ имеют корни 1; p и 2; $3p$ соответственно. Тогда, по теореме Виета $1 + p = -\frac{b}{a}$ и $2 + 3p = -\frac{6b}{a}$, откуда

$6(1+p)=2+3p$ или $p=-\frac{4}{3}$. Уравнения $6x^2+2x-8=0$ с корнями $1;-\frac{4}{3}$ и $x^2+2x-8=0$ с корнями $2;-4$ реализуют этот случай.

2) Костя изменил третий коэффициент, а $a_1=a$. Тогда $p=\frac{c}{a}=\frac{c_1}{6a}$, откуда $c_1=6c$ и уравнения $ax^2+bx+c=0$ и $x^2+bx+6c=0$ имеют корни $1;\ p$ и $2;\ 3p$ соответственно. По теореме Виета $1+p=-\frac{b}{a}$ и $2+3p=-\frac{b}{a}$, откуда $1+p=2+3p$ или $p=-\frac{1}{2}$. Уравнения $x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}=0$ с корнями $1;-\frac{1}{2}$ и $x^2-\frac{1}{2}x-3=0$ с корнями $2;-\frac{3}{2}$ реализуют этот случай.

Ответ: $\left\{-\frac{4}{3};-\frac{1}{2}\right\}$.

2020 год

1. Например, Валера задумал 102, а Леша задумал 93:
$$102 + 1 + 2 = 93 + 9 + 3 = 105.$$
Ответ: Нет, не верно.

2. Вычтем из первого уравнения второе: $x^2 - xy - 6y^2 = 0 \Leftrightarrow (x - 3y)(x + 2y) = 0$.
Рассмотрим случай, когда $x - 3y = 0$: $9y^2 - 4y^2 = 20 \Leftrightarrow y^2 = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}y=2,\\x=6;\end{cases}\\\begin{cases}y=-2,\\x=-6.\end{cases}\end{array}\right.$
Рассмотрим случай, когда $x + 2y = 0$: $4y^2 - 4y^2 = 20 \Leftrightarrow 0 \neq 20$.
Второе решение: Разложим левые части уравнений на множители: $\begin{cases}(x-2y)(x+2y) = 20,\\y(x+2y) = 20.\end{cases}$
Поделим первое уравнение на второе: $\frac{x-2y}{y} = 1 \Leftrightarrow x = 3y$ (мы имеем право делить, поскольку в правых частях не нули, а значит и множители левых частей не могут быть нулями). Подставим в первое уравнение 3y вместо x:
$$9y^2 - 4y^2 = 20 \Leftrightarrow y^2 = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}y = 2,\\x = 6;\end{cases}\\\begin{cases}y = -2,\\x = -6.\end{cases}\end{array}\right.$$
Ответ: $(\mathbf{6}; \mathbf{2}), (-\mathbf{6}; -\mathbf{2})$

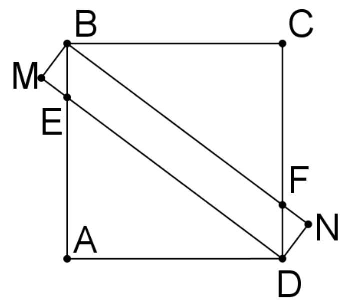
3. Пусть в итоге холодной воды будет $2x$ л, тогда горячей – $1{,}5 \cdot 2x = 3x$ л, а вся ванна – $5x$ л, значит холодная вода будет занимать $\frac{2}{5}$ ванны, а горячая – $\frac{3}{5}$ ванны.
На то чтобы налить горячую воду нужно $\frac{3}{5} \cdot 23$ мин, а на то, чтобы налить холодную – $\frac{2}{5} \cdot 17$. Таким образом, разница во времени:
$$\frac{3}{5} \cdot 23 - \frac{2}{5} \cdot 17 = \frac{1}{5} \cdot (69 - 34) = \frac{1}{5} \cdot 35 = 7 \text{ мин.}$$
Ответ: Через 7 минут.

4. Поскольку по условию уравнение квадратное, значит $a \neq 0$. Сумма корней равна $\left(-\frac{b}{a}\right)$, а произведение – $\left(\frac{c}{a}\right)$. Получаем систему: $\begin{cases}\frac{c}{a} + \frac{b}{a} = 2,\\-\frac{b}{a} : \frac{c}{a} = 2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b + c = 2a,\\b = -2c\end{cases} \Leftrightarrow$
$\begin{cases}-c = 2a,\\b = -2c\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{c}{a} = -2,\\-\frac{b}{a} = 4.\end{cases}$ Тогда корни исходного уравнения совпадают, например, с корнями уравнения $x^2 + 4x - 2 = 0$. С помощью формулы корней квадратного уравнения находим эти корни: $-2 \pm \sqrt{6}$.
Ответ: $-\mathbf{2} \pm \sqrt{\mathbf{6}}$.

5. Обозначим количество леденцов у девочек за $a, b, c \text{ и } d$, причем $a \leq b \leq c \leq d$. По условию $\begin{cases} a + b \geq 41, \\ a + c \geq 41, \\ a + d \geq 41. \end{cases}$ Сложим все три неравенства: $3a + b + c + d \geq 123$, но $a + b + c + d = 100$, а значит $2a \geq 23$. Поскольку число a – целое, то наименьшее возможное значение $a = 12$. Покажем, что при таком a выполняются все условия: пусть у Лизы – 12 леденцов, у Насти и Ксюши по 29 леденцов, а у Маши – 30 леденцов. Всего у девочек $12 + 29 + 29 + 30 = 100$ леденцов, и у любых двух не меньше 41 леденца.

   Ответ: 12.

6. Поскольку квадрат – это частный случай параллелограмма, то из того, что площади параллелограммов $DEBF$ и $DABC$ относятся как $1 : 4$ следует, что $EB : AB = 1 : 4$. Обозначим EB за x, тогда $AE = 4x - x = 3x$. В прямоугольном треугольнике EAD катеты относятся как $3 : 4$, а значит он подобен египетскому, т.е. $ED = 5x$. Треугольники MEB и EAD подобны ($\angle MEB = \angle AED$, $\angle BME = \angle EAD = 90°$), коэффициент подобия равен $\frac{BE}{ED} = \frac{x}{5x} = 0{,}2$, значит $MB = 0{,}8x$ и $ME = 0{,}6x$. Площадь квадрата равна $(4x)^2 = 16\,x^2$, а площадь прямоугольника $MBND$ равна $0{,}8x(5x + 0{,}6x) = 0{,}8 \cdot 5{,}6x^2$. Отношение площадей:



$$\frac{16x^2}{0{,}8 \cdot 5{,}6x^2} = \frac{25}{7}.$$

   Ответ: $\mathbf{25 : 7}$.

2021 год

1. Квадрат любого числа не может быть отрицательным, а значит сумма двух квадратов тоже не может быть отрицательна, но может быть равна нулю, если оба числа равны нулю. Тогда исходное неравенство равносильно системе уравнений:

$$\begin{cases} 6 + x - x^2 = 0, \\ x^3 + x^2 - x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = -2, \\ x = 3, \end{array}\right. \\ x^3 + x^2 - x + 2 = 0. \end{cases}$$

   Подставим -2 и 3 в последнее уравнение: $-8 + 4 + 2 + 2 = 0$; $27 + 9 - 3 + 2 \neq 0$, значит единственное решение неравенства – это число -2.

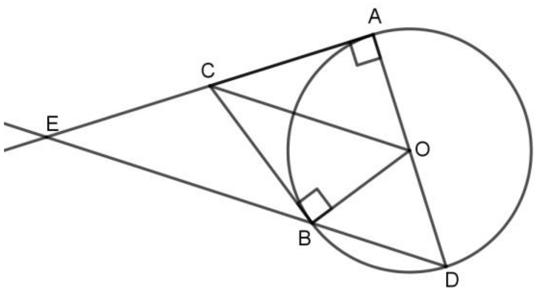
   Ответ: -2.

2. Заметим, что $4 + 2\sqrt{3} = 1 + 2\sqrt{3} + \sqrt{3}^2 = \left(1 + \sqrt{3}\right)^2$, тогда

$$\frac{\sqrt{4 + 2\sqrt{3}}}{1 + \sqrt{3}} = \frac{1 + \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} = 1 < \sqrt{2}.$$

   Ответ: $\frac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}}{1+\sqrt{3}} < \sqrt{2}$.

3. Пусть O – центр окружности. Проведем отрезок OC. Радиусы OA и OB перпендикулярны соответственно AC и BC. Прямоугольные треугольники AOC и BOC равны. Значит, равны центральные углы AOC и BOC, которые равны половинам дуги BA.



   Вписанный угол ADE также равен половине дуги BA. Так как $\angle AOC = \angle ADE$, то $OC \parallel DE$. Поскольку O – середина AD, значит OC – средняя линия треугольника ADE и, следовательно, C – середина AE, **ч.т.д.**

4. Пусть x детей написали слово «КЫСЯ», y детей написали «МУРЛОКОТАМ», а z детей – «КОТЯРКА». Тогда $x + y + z = 23$. Так как в словах «КЫСЯ» и «МУРЛОКОТАМ» буква «к» встречается один раз, а в слове «КОТЯРКА» – два раза, то $x + y + 2z = 30$. Наконец, так как буква «я» встречается по одному разу и только в словах «КЫСЯ» и «КОТЯРКА», то $x + z = 20$. Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} x + y + z = 23, \\ x + y + 2z = 30, \\ x + z = 20. \end{cases}$$

Вычитая из второго уравнения первое, получаем, что $z = 7$. Подставляя найденное значение z в третье уравнение, получаем, что $x = 13$.

Ответ: 13 детей написали слово «КЫСЯ».

5. Обозначим буквой d разницу в расстоянии. Тогда за 6 дней он прошел:

$$11 + (11 + d) + (11 + 2d) + (11 + 3d) + (11 + 4d) + (11 + 5d) = 66 + 15d.$$

Так как $66 + 15d = 81$, получаем $d = 1$, значит за третий день он прошел $11 + 2 = 13$ километров.

Ответ: 13 км.

6. Заменим громоздкие выражения буквами: $2x^2 - 7x - 2 = a$, $x^2 - 5x + 6 = b$ и $x^2 - 4 = c$. Тогда получаем:

$$\frac{a}{b} = \frac{a + c}{b + c} \Leftrightarrow \begin{cases} ab + ac = ab + bc, \\ b \neq 0, \\ b + c \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a = b, \\ c = 0, \end{array}\right. \\ b \neq 0, \\ b + c \neq 0. \end{cases}$$

Вернемся к исходной переменной:

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} 2x^2 - 7x - 2 = x^2 - 5x + 6, \\ x^2 - 4 = 0, \end{array}\right. \\ x^2 - 5x + 6 \neq 0, \\ x^2 - 5x + 6 + x^2 - 4 \neq 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 4, \\ x = 2, \\ x = -2, \end{array}\right. \\ x^2 - 5x + 6 \neq 0, \\ x^2 - 5x + 6 + x^2 - 4 \neq 0. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4, \\ x = -2. \end{array}\right.$$

Ответ: $\{-2; 4\}$.

2022 год

1. **Ответ:**

1	2	3	4
2	0	2	2

или

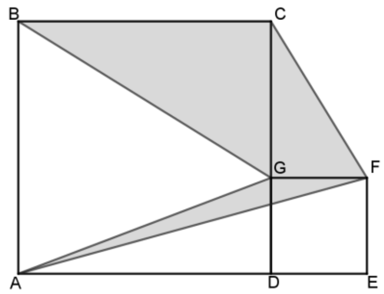
1	2	3	4
4	3	7	1

.

2. Поскольку сумма Жениных чисел нечетна, значит и одно из них тоже нечетно. Пусть эти числа a (четное) и b (нечетное). Тогда $2280 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 19 = a \cdot b$.
   В разложении на простые множители числа b могут быть только нечетные числа, являющиеся делителями числа 2280, и число b должно быть меньше 99 (иначе $a + b \geq 100$). С другой стороны, a тоже меньше 99, значит $b > \frac{2280}{99} > 22$. Остается всего два варианта: либо $b = 5 \cdot 19 = 95$, но тогда $a = 24$ и $a + b = 119$, т.е. не двузначное; либо $b = 3 \cdot 19 = 57$, тогда $a = 40$ и $a + b = 97$.
   Ответ: 57 и 40.

3. Пусть $x + 6 = t$, тогда получим уравнение $(t-2)(t-1)(t+1)(t+2) = 4 \Leftrightarrow (t^2-4)(t^2-1) = 4 \Leftrightarrow$
$$t^4 - 5t^2 + 4 = 4 \Leftrightarrow t^2(t^2-5) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0, \\ t = \sqrt{5}, \\ t = -\sqrt{5} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -6, \\ x = \sqrt{5} - 6, \\ x = -\sqrt{5} - 6. \end{array}\right.$$
   Ответ: $\{-\sqrt{5} - 6;\ -6;\ \sqrt{5} - 6\}$.

4. Пятиугольник $AFCBG$ можно разбить на треугольник AGF и трапецию $BCFG$ ($FG \parallel DE \parallel BC$). Пусть сторона меньшего квадрата равна a, тогда высота треугольника AGF, опущенная на GF, тоже равна a (т.к. расстояния от всех точек прямой AE до прямой GF равны), высота CG трапеции $BCFG$ равна $12 - a$. Отсюда:



$$S_{AFCBG} = \frac{1}{2}a \cdot GF + \frac{1}{2}(12-a)(BC + GF) = \frac{1}{2}\left(a^2 + (12-a)(12+a)\right) =$$
$$= \frac{1}{2}(a^2 + 144 - a^2) = 72.$$

   Ответ: 72.

5. Поскольку числа $1+\sqrt{3}$ и $1-\sqrt{3}$ являются корнями данной функции, то ее можно записать в виде

$$f(x)=a\left(x-1-\sqrt{3}\right)\left(x-1+\sqrt{3}\right).$$

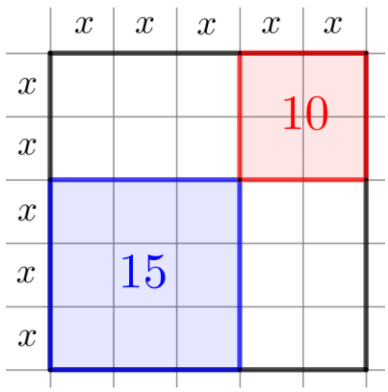
Тогда

$f\left(1+\sqrt{2}\right)=a\left(1+\sqrt{2}-1-\sqrt{3}\right)\left(1+\sqrt{2}-1+\sqrt{3}\right)=a\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)=$
$=-a=-2$, т.е. $a=2$.

$$f(1)=2\left(1-1-\sqrt{3}\right)\left(1-1+\sqrt{3}\right)=-6.$$

Ответ: -6.

6. Пусть сумма чисел в каждой строчке и в каждом столбце равна x. Сумма чисел в шести белых клетках в правом нижнем углу – это, с одной стороны сумма чисел в двух правых столбцах минус сумма чисел из красного квадрата, т.е. $(2x-10)$, а с другой стороны – сумма чисел в трех нижних строчках минус сумма чисел из синего квадрата, т.е. $(3x-15)$. Получаем уравнение $2x-10=3x-15$, откуда $x=5$, а сумма всех чисел в квадрате равна $5x=25$.



Ответ: 25.