

Алгебра II

Вступительные в ЦОД 2016

- 1) Дан квадрат 5×5 клеток. Расставьте в клетках этого квадрата плюсы и минусы так, чтобы в любом квадрате 3×3 оказалось ровно 8 минусов, а всего в большом квадрате плюсов было больше одного.
- 2) Автолюбитель отправился в путь с запасным колесом в багажнике. В пути он несколько раз менял колеса, в результате чего каждое из пяти колес проехало ровно по 4000 км. Сколько всего километров проехал автолюбитель?
- 3) Каждый из четырех мальчиков всегда говорит правду или всегда врет. Саша говорит, что Дания врёт, Дания говорит, что Аркаша врёт, Аркаша говорит, что Дания врёт, а Леша говорит, что Саша врёт. Сколько может быть врунов среди мальчиков?
- 4) Крокодилу Гене и Чебурашке подарили торт. Чебурашка поедает торт в 6 раз медленнее Гены, но начал есть на 10 минут раньше, и в итоге им досталось торта поровну. За какое время Чебурашка съел бы торт в одиночку?
- 5) Составьте из восьми различных цифр число, которое делится на 7.
- 6) Прямоугольник разбит на 4 прямоугольника, площади трех из которых указаны на рисунке. Найдите площадь четвертого прямоугольника.

| | |
|---|----|
| 6 | 12 |
| 8 | |
- 7) Ученик ЦОД бежит втрое медленнее трамвая и за каждые три минуты отстает от этого трамвая на 1 км. Найдите скорость трамвая (в км/ч).
- 8) В пятых классах некоторой школы число отсутствующих учеников составляло $\frac{1}{7}$ часть числа присутствующих. Когда заболел еще один ученик, то число отсутствующих стало равно $\frac{1}{6}$ числа присутствующих. Сколько учеников в пятых классах этой школы?

| | | |
|---|----|----|
| | | 6 |
| | 24 | 18 |
| 3 | 6 | |
- 9) Большой прямоугольник четырьмя линиями разбит на 9 прямоугольников, площади пяти из которых указаны на рисунке. Найдите площадь всего прямоугольника.

В 6 и 9 задачах стороны любого из прямоугольников могут быть нецелыми!

Старая новая квазипервая встреча...

- 1) Слабо разложить на множители выражение $x^2 - 5x + 6$?
- 2) Сократите дроби:
А) $\frac{3x^2 - 7x + 2}{2 - 6x}$; Б) $\frac{16a^2 - 8a + 1}{1 - 4a + x - 4ax}$; В) $\frac{8 \cdot 100^n}{2^{2n+1} \cdot 5^{2n-2}}$.
- 3) Числитель и знаменатель дроби – положительные числа. Числитель увеличили на 1, а знаменатель на 10. Могла ли дробь увеличиться?
- 4) Упростите выражение:
$$\left(\frac{2m}{2m+n} - \frac{4m^2}{4m^2 + 4mn + n^2} \right) : \left(\frac{2m}{4m^2 - n^2} + (n - 2m)^{-1} \right)$$
- 5) Решите уравнение:

$$2x^2 + 3x - 17 = 2(2 - \sqrt{7})^2 + 3(2 - \sqrt{7}) - 17.$$

... И старое новое квазипервое ДЗ

- 1) Разложите на множители:
А) $16a^3 + 8a^2b + b^2a$; Б) $16a^3 + 48a^2b + 48ab^2 + 16b^3$.
- 2) Сократите дроби:
А) $\frac{2x - 3x^2}{3x^2 + 7x - 6}$; Б) $\frac{b^2 - a^2}{a^2b + 2b - ab^2 - 2a}$; В) $\frac{5^{n+1} - 5^{n-1}}{2 \cdot 5^n}$.
- 3) Два экскаватора, работая вместе, могут выкопать котлован за 48 часов. За какое время каждый из них может выкопать котлован, работая в отдельности, если первому на это требуется на 40 часов больше времени, чем второму?
- 4) Упростите выражения:
А) $\left(\frac{2}{c-2} + \frac{3c-21}{c^2+c-6} + \frac{2c}{c+3} \right) \cdot \frac{c}{2c-5}$; Б) $\frac{3c-6}{c+2} - \frac{c}{(c+2)^2} : \frac{c}{c^2-4} - \frac{4c}{c+2}$.

Что-то от новой техники и старые добрые числа.

И еще что-то геометрическое)

Больше всего мне не нравятся мысли, которые слишком скоро подтверждаются.
Что уж там такого сказано, если через какие-нибудь два года оказывается, что это верно?

Э. Канетти

- 1) Найдите все такие
А) целые числа a, b, c , для которых $(3a - b)(3b - c)(3c - a) = 15015$;
Б) натуральные числа x, y, z , для которых $x + \frac{1}{y + \frac{1}{z}} = \frac{11}{3}$.
- 2) Докажите, что число
А) $2^8 + 2^5 \cdot 5^6 + 5^{12}$ – составное;
Б) $\underbrace{1 \dots 1}_{100} \underbrace{5 \dots 5}_{99} 6$ – точный квадрат.
- 3) Могут ли расстояния от некоторой точки на плоскости до вершин некоторого квадрата быть равными 1, 4, 7, 8?
- 4) В треугольнике $\triangle ABC$ биссектриса из вершины A , высота из вершины B и срединный перпендикуляр к стороне AB пересекаются в одной точке. Найдите величину угла $\angle A$.
- 5) BD – биссектриса угла $\angle B$ треугольника $\triangle ABC$. Точка E выбрана так, что $\angle EAB = \angle ACB$, $AE = DC$, и при этом отрезок ED пересекает отрезок AB в точке K . Докажите, что $KE = KD$.
- 6) В четырехугольнике $ABCD$ точки E, F, G – середины стороны AB, BC и AD соответственно. При этом $GE \perp AB, GF \perp BC$, а $\angle ABC = 96^\circ$. Найдите $\angle ACD$.
- 7) В четырехугольнике $ABCD$ стороны $AB = BC, CD = DA$. Точки K и L расположены на отрезках AB и BC таким образом, что $BK = 2AK, BL = 2CL$. Точки M и N – середины отрезков CD и DA соответственно. Докажите, что отрезки KM и LN равны.

Домашка №4

- 1) Натуральное число n называется *хорошим*, если после приписывания его справа к любому натуральному числу получается число, делящееся на n . Запишите десять *хороших* чисел, которые меньше, чем 1000. Достаточно привести ответ.
- 2) Сорока-ворона кашу варила, деток кормила. Третьему птенцу досталось столько же каши, сколько первым двум вместе взятым. Четвертому – столько же, сколько второму и третьему. Пятому – столько же, сколько третьему и четвертому. Шестому – столько же, сколько четвертому и пятому. А седьмому не досталось – каша кончилась! Известно, что пятый птенец получил 10 грамм каши. Сколько каши сварила сорока-ворона?
- 3) $ABCD$ – выпуклый четырехугольник. Известно, что $\angle CAD = \angle DBA = 40^\circ, \angle CAB = 60^\circ, \angle CBD = 20^\circ$. Найдите угол $\angle CDB$.
- 4) Двенадцать стульев стоят в ряд. Иногда на один из свободных стульев садится человек. При этом ровно один из его соседей (если они были) встает и уходит. Какое наибольшее количество человек могут одновременно оказаться сидящими, если вначале все стулья были пустыми?

Геометрия III

Геометрическая разминка

- 1) Биссектриса угла ABC образует с его стороной угол, который равен углу, смежному с углом ABC . Найдите градусную меру угла ABC .
- 2) Треугольник ABC – равносторонний. Лучи AD, BE и CM попарно пересекаются внутри треугольника, причем $\angle BAD = \angle CBE = \angle ACM$. Являются ли точки D, E и M вершинами равностороннего треугольника? Ответ обоснуйте.
- 3) Через вершины A и C треугольника ABC проведены прямые, перпендикулярные биссектрисе угла ABC . Они пересекают прямые CB и BA в точках K и M соответственно. Найдите длину AB , если $BM = 8$ см, $KC = 1$ см и $AB > BC$.
- 4) В треугольнике ABC : $\angle B = 20^\circ, \angle C = 40^\circ$, длина биссектрисы AM равна 2 см. Найдите разность сторон $(BC - AB)$.
- 5) В треугольнике ABC проведены высоты AP и CN , которые пересекаются в точке H , лежащей внутри треугольника. Может ли угол $\angle AHC$ оказаться острым? А если AP и CN – биссектрисы?

Геометрия forever!

- 1) Даны два равнобедренных треугольника, в каждом из которых есть сторона, длина которой 6 см, и угол, равный 100° . Можно ли утверждать, что эти треугольники равны?
- 2) Даны десять точек, расположенные в виде «равностороннего треугольника». Зачеркните некоторые из данных точек так, чтобы нельзя было построить ни одного равностороннего треугольника с вершинами в оставшихся точках. Постарайтесь зачеркнуть наименьшее количество точек.
- 3) В остроугольном треугольнике ABC проведены медиана BM и высота CH . Найдите длину AC , если $MH = 10$ см.
- 4) Какое наименьшее количество плоских разрезов необходимо сделать, чтобы разрезать куб на 64 маленьких кубика? После каждого разреза разрешается перекладывать образовавшиеся части в любое место.
- 5) Куб сложен из 27 одинаковых кубиков. Сравните площадь поверхности этого куба и площадь поверхности фигуры, которая получится, если из него вынуть все «угловые» кубики.
- 6) Через вершины A и C треугольника ABC проведены прямые, перпендикулярные биссектрисе угла ABC . Они пересекают прямые CB и BA в точках K и M соответственно. Найдите длину AB , если $BM = 8$ см, $KC = 1$ см и $AB > AC$.
- 7) Отрезки AC и BD пересекаются в точке O . Периметр треугольника ABC равен периметру треугольника ABD , а периметр треугольника ACD равен периметру треугольника BCD . Найдите длину AO , если $BO = 13$ см.

Геометролимпиада

- 1) На плоскости отмечены точки A и B . Найдите геометрическое место точек M таких, что A, B и M образуют равнобедренный треугольник.
- 2) Найдите угол A треугольника ABC , если он равен одному из углов между биссектрисами углов B и C .
- 3) Дан прямоугольник $ABCD$, причем $AB = 3BC$. На стороне CD отмечены точки E и F так, что $CE = EF = FD$. Докажите, что сумма углов $\angle ACD + \angle AED + \angle AFD$ равна 90° .
- 4) Покажите, как разрезать прямоугольник 1×5 на 5 частей так, чтобы из них можно было сложить квадрат.
- 5) На стороне BC квадрата $ABCD$ во внешнюю сторону построен равнобедренный треугольник BEC с основанием BC . Известно, что угол EAD равен 75° . Найдите угол BEC .
- 6) Треугольник, один из углов которого равен 40° , разрежали биссектрисами на 6 треугольников, среди которых есть прямоугольные. Какими могли быть остальные углы исходного треугольника?

Постолимпиадное ДЗ

- 1) Можно ли расположить на плоскости (но не на одной прямой!) пять точек так, чтобы выполнялось условие: «если три точки являются вершинами треугольника, то это треугольник – прямоугольный»?
- 2) А можно ли расположить на плоскости 6 точек так, чтобы любые три из них образовывали равнобедренный треугольник?
- 3) В треугольнике ABC H – точка пересечения высот AA_1 и BB_1 . Найдите $\angle BAC$, если известно, что $AH = BC$.
- 4) Вася вырезал из картона треугольник, разрезал его на два треугольника и послал обе части Пете, который также сложил из них треугольник. Верно ли, что Петин треугольник обязательно равен Васиному?
- 5) Существует ли выпуклый четырехугольник, у которого сумма длин диагоналей не меньше, чем сумма длин всех сторон?

Опять геометрия...

- 1) Найдите расстояние от центра ромба до его стороны, если острый угол ромба равен 30° , а сторона равна 4.
- 2) Найдите площадь трапеции, если ее высота равна 8, ее диагонали равны 17 и 10, а оба угла при основании острые.

- 3) Докажите, что сумма расстояний от произвольной точки основания равнобедренного треугольника до боковых сторон постоянна.
- 4) Медиана и высота делят угол на 3 равные части. Докажите, что треугольник прямоугольный.
- 5) Внутри прямоугольного треугольника ABC (угол B – прямой) взята точка M так, что площади треугольников ABM и VMC соответственно в 3 и 4 раза меньше площади треугольника ABC . Найдите длину отрезка BM , если $AM = a$ и $MC = c$.