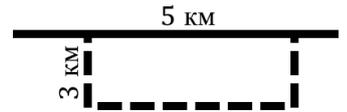


# Геометрия

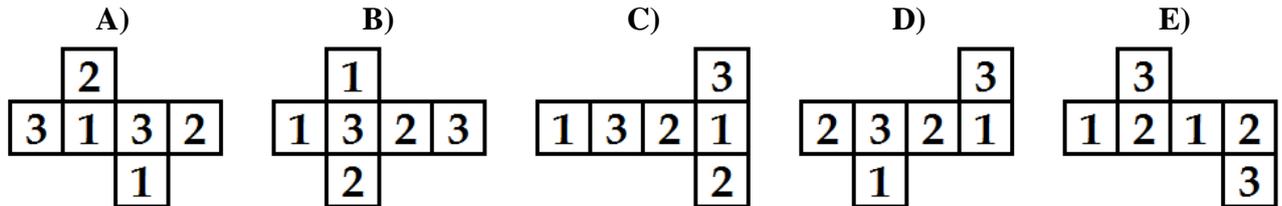
## КР №1. Разминка

- 1) На участке дороги идет ремонт, поэтому водителям приходится объезжать этот участок по запасному пути, отмеченному на плане пунктиром. На сколько километров увеличивает путь этот объезд?

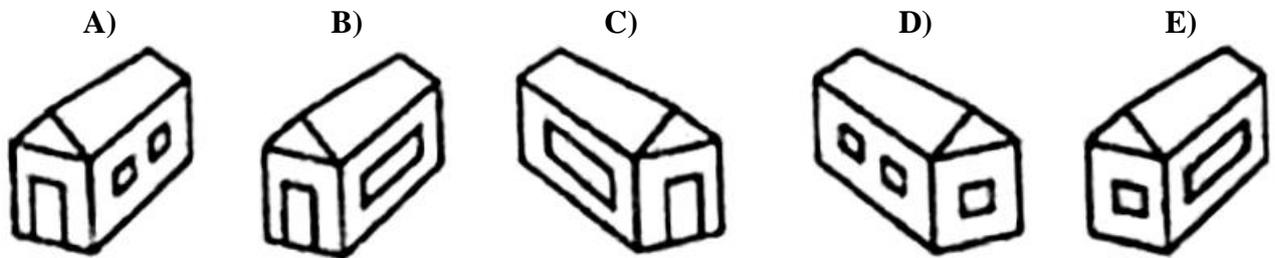


- 1) 3 км; 2) 5 км; 3) 6 км; 4) 10 км; 5) Невозможно определить.

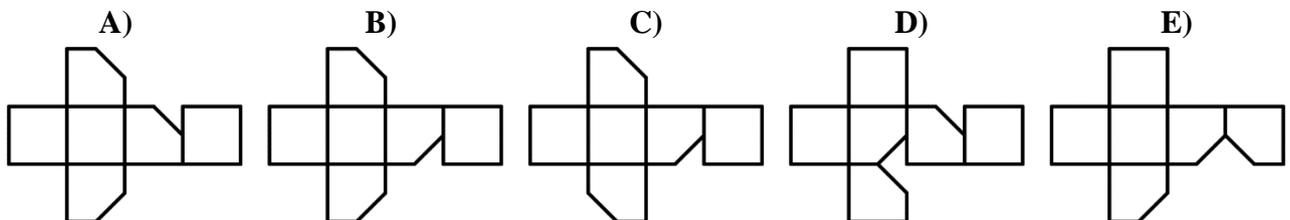
- 2) На каждой грани бумажного кубика написана цифра 1, 2 или 3, причем цифры на противоположных гранях – одинаковые. Какая из фигурок может получиться, если этот кубик разрезать по некоторым ребрам и развернуть?



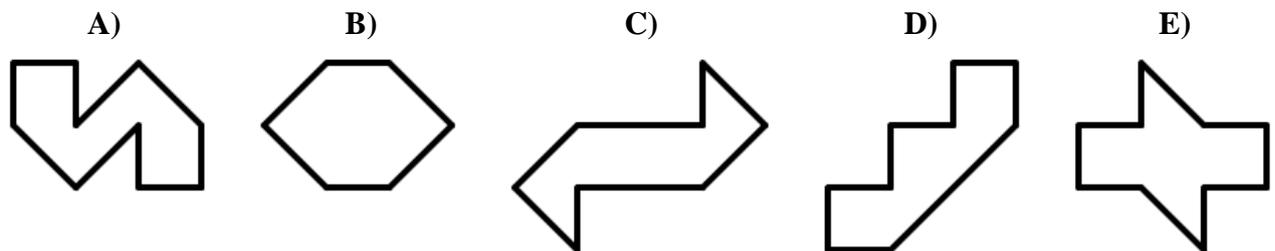
- 3) Дом Винни-Пуха нарисован 4 раза, а домик Пятачка только один раз. Где же он?



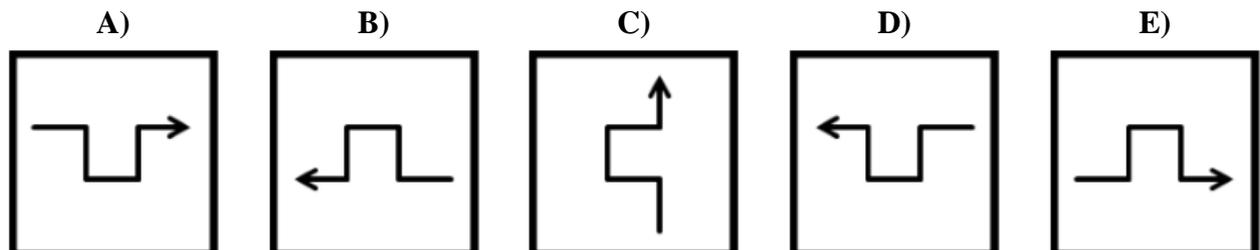
- 4) От кубика, склеенного из бумаги, отрезали уголок. Затем этот кубик разрезали по некоторым ребрам, развернули и получили одну из фигурок А-Е. Какую?



- 5) Какую из фигурок А-Е нельзя составить из двух одинаковых деталей, изображенных справа? Их можно только поворачивать, переворачивать нельзя.



- 6) Среди этих пяти карточек есть три одинаковых. Какие?



- 1) А, В и С; 2) В, С и Е; 3) А, С и D; 4) В, D и Е; 5) С, D и Е.

### ДЗ №1. Разрезания

- 1) Квадрат содержит 16 клеток. Разделите квадрат на две равные части так, чтобы линия разреза шла по сторонам клеток. Способы разрезания квадрата на две части будем считать различными, если части квадрата, полученные при одном способе разрезания, не равны частям, полученным при другом способе. Сколько всего решений имеет задача?
- 2) Прямоугольник  $3 \times 4$  содержит 12 клеток. Найдите пять способов разрезания прямоугольника на две равные части так, чтобы линия разреза шла по сторонам клеток (способы разрезания считаются различными, если части, полученные при одном способе разрезания, не равны частям, полученным при другом способе).
- 3) Прямоугольник  $3 \times 5$  содержит 15 клеток и центральная клетка удалена. Найдите пять способов разрезания оставшейся фигуры на две равные части так, чтобы линия разреза шла по сторонам клеток.
- 4) Квадрат  $6 \times 6$  разграфлен на 36 одинаковых квадратов. Найдите пять способов разрезания квадрата на две равные части так, чтобы линия разреза шла по сторонам квадратов. Эта задача имеет более 200 решений. Найдите хотя бы 15 из них.
- 5) Можно ли квадрат  $5 \times 5$  клеток разрезать на две равные части так, чтобы линия разреза шла по сторонам клеток? Ответ обоснуйте.
- 6) Разделите квадрат  $4 \times 4$  на четыре равные части так, чтобы линия разреза шла по сторонам клеток. Сколько различных способов разрезания вы найдете?
- 7) Разделите фигуру (рис. 1) на 3 равные части так, чтобы линия разреза шла по сторонам квадратов.
- 8) Разделите фигуру (рис. 2) на 4 равные части так, чтобы линия разреза шла по сторонам квадратов.
- 9) Разделите фигуру (рис. 3) на 4 равные части так, чтобы линия разреза шла по сторонам квадратов. Найдите как можно больше решений.

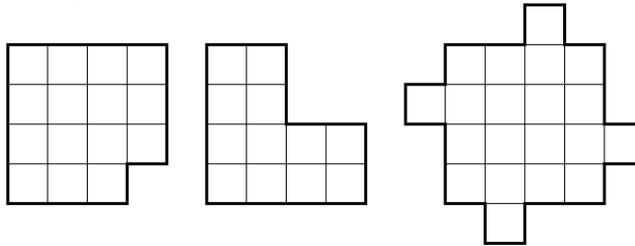


Рисунок 1

Рисунок 2

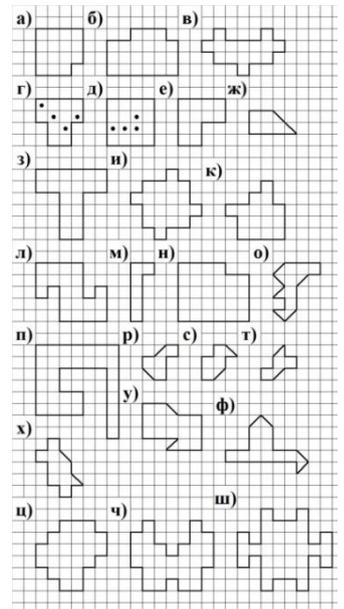
Рисунок 3

- 10) Разделите квадрат  $5 \times 5$  клеток с вырезанной центральной клеткой на четыре равные части.

### ДЗ №2. Перекладывания спичек

Во всех задачах никаких болтающихся без дела спичек не должно быть!

- 1) На рисунках *a-e* уберите указанное слева число спичек, чтобы осталось указанное справа число квадратов **со стороной в одну спичку**.
  - a) 2 4
  - б) 3 3
  - в) 8 4
  - г) 5 3
  - д) 6 4
  - е) 2 4
  - ж) 4 3
  - з) 2 4
  - и) 3 3
- 2) Из спичек сложен квадрат  $3 \times 3$ . Уберите
  - A) 4 спички, чтобы осталось 5 квадратов;
  - Б) 8 спичек, чтобы осталось 2 квадрата;
  - В) 6 спичек, чтобы осталось 3 квадрата.
- 3) На рисунках *ж-и* переложите указанное слева число спичек, чтобы получилось указанное справа число квадратов.
- 4) Положите 12 спичек так, чтобы получились четыре маленьких квадрата и один большой.
- 5) Из 10 спичек составьте три квадрата.



### ДЗ №3. Разрезания 2

- 6) Разрежьте фигуры а) – в) на три равные части. Резать можно только по сторонам клеточек; части должны быть равны не только по площади, но и по форме.
- 7) Разделите фигуры г) и д) по линиям сетки на четыре одинаковые части, чтобы в каждой части был ровно один кружочек.
- 8) Разрежьте фигуры е) – м) на четыре равные части. Резать можно только по сторонам и диагоналям клеточек.
- 9) Разрежьте квадрат на два равных
  - A) пятиугольника;
  - Б) шестиугольника;
  - В) семиугольника.

- 10) Разрежьте квадрат на три (не обязательно равных) шестиугольника.
- 11) Разрежьте фигуры  $n - x$  на две равные части. Резать можно только по сторонам и диагоналям клеточек.
- 12) Разрежьте фигуры  $\varrho - \vartheta$  на четыре равные (и по площади, и по форме) части.
- 13) Разрежьте квадрат  $7 \times 7$  на пять частей и переложите их так, чтобы получились три квадрата:  $2 \times 2$ ,  $3 \times 3$  и  $6 \times 6$ . Постарайтесь найти несколько способов.

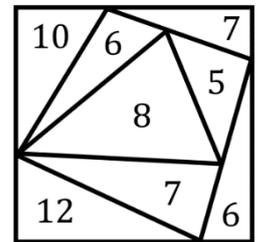
### ДЗ №4. Геометрический хардкор, наверное ☺

*Не желай ничего, чего ты не сможешь достигнуть сам!*  
Рене Декарт

- 1) Биссектриса угла  $ABC$  образует с его стороной угол, который равен углу, смежному с углом  $ABC$ . Найдите градусную меру угла  $ABC$ .
- 2) Треугольник  $ABC$  – равносторонний. Лучи  $AD, BE$  и  $CM$  попарно пересекаются внутри треугольника, причем  $\angle BAD = \angle CBE = \angle ACM$ . Являются ли точки  $D, E$  и  $M$  вершинами равностороннего треугольника? Ответ обоснуйте.
- 3) Через вершины  $A$  и  $C$  треугольника  $ABC$  проведены прямые, перпендикулярные биссектрисе угла  $ABC$ . Они пересекают прямые  $CB$  и  $BA$  в точках  $K$  и  $M$  соответственно. Найдите длину  $AB$ , если  $BM = 8$  см,  $KC = 1$  см и  $AB > BC$ .
- 4) В треугольнике  $ABC$ :  $\angle B = 20^\circ, \angle C = 40^\circ$ , длина биссектрисы  $AM$  равна 2 см. Найдите разность сторон  $(BC - AB)$ .
- 5) В треугольнике  $ABC$  проведены высоты  $AP$  и  $CN$ , которые пересекаются в точке  $H$ , лежащей внутри треугольника. Может ли угол  $AHC$  оказаться острым? А если  $AP$  и  $CN$  – биссектрисы?

### КР №2. Разбор вступительной АУ

- 1) Некоторое натуральное число при делении на 7 дает остаток 3, а при делении на 11 – остаток 5. Найдите остаток от деления этого числа на 77.
- 2) Сумма цифр числа  $x$  равна  $y$ , а сумма цифр числа  $y$  равна  $z$ . Может ли сумма  $x + y + z$  быть равна 60?
- 3) В стаде, состоящем из лошадей, двугорбых и одногорбых верблюдов, в общей сложности 200 горбов. Сколько животных в стаде, если количество лошадей равно количеству двугорбых верблюдов?
- 4) В поезде Сан-Франциско – Чикаго ввели сплошную нумерацию мест в вагонах. Во всех вагонах одинаковое количество мест. Известно, что места 385 и 416 находятся в одном вагоне, а места 544 и 577 находятся в разных вагонах, причем эти вагоны – не соседние. Сколько мест в одном вагоне?
- 5) Квадрат  $ABCD$  разрезали на треугольники и внутри каждого из них написали его периметр. Найдите сторону квадрата  $ABCD$ .



### ДЗ №5. Разбор вступительной АУ

- 1) Докажите, что
 
$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{98} - \frac{1}{99} + \frac{1}{100} > \frac{1}{5}$$
- 2) Существуют ли такие три *различных* числа  $a, b$  и  $c$ , что  $a(b - c) = b(c - a) = c(a - b)$ ?
- 3) Даны пять утверждений про натуральные числа  $x$  и  $y$ :
 

« $x$ – простое число»;	« $y$ – простое число»;	« $x + y$ – простое число»;
« $x + 2y$ – простое число»;	« $2x + y$ – простое число».	

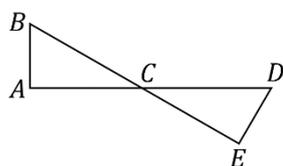
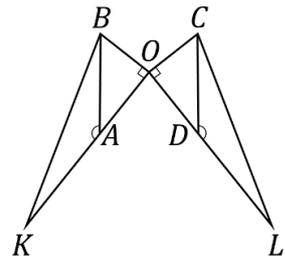
Какое наибольшее количество из этих утверждений могут быть истинными одновременно?

- 4) Дан ряд чисел от 1 до 2016. Виталик и Женя играют в такую игру – Виталик зачеркивает каких-нибудь два числа, сумма которых делится на три, а Женя зачеркивает каких-нибудь два числа, разность которых делится на три. Начинает Виталик. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?
- 5) Найдите все такие пары чисел  $(x, z)$ , что  $3x^2 + z^2 - 2xz + 4x + 2 = 0$ .

### ДЗ №6. Даешь равенство треугольникам!

- 1) В треугольниках  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$   $AB = A_1B_1$ ,  $\angle A = \angle A_1$ ,  $\angle B = \angle B_1$ , точки  $D$  и  $D_1$  лежат соответственно на сторонах  $AC$  и  $A_1C_1$ , причем  $CD = C_1D_1$ . Докажите, что  $\triangle BDC = \triangle B_1D_1C_1$ .
- 2) В треугольниках  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$   $AB = A_1B_1$ ,  $AC = A_1C_1$ ,  $\angle A = \angle A_1$ , точки  $D$  и  $D_1$  лежат соответственно на сторонах  $AC$  и  $A_1C_1$ ,  $\angle DBC = \angle D_1B_1C_1$ . Докажите, что  $\triangle BDC = \triangle B_1D_1C_1$ .

- 3) Дан равнобедренный треугольник  $ABC$  с основанием  $AC$ . Точки  $D$  и  $E$  лежат соответственно на сторонах  $AB$  и  $BC$ ,  $AD = CE$ .  $DC$  пересекает  $AE$  в точке  $O$ . Докажите, что треугольник  $AOC$  равнобедренный.
- 4) Два равнобедренных треугольника  $ABC$  и  $ADC$  имеют общее основание  $AC$ . Вершины  $B$  и  $D$  расположены по разные стороны от  $AC$ . Точка  $E$  лежит на отрезке  $BD$ , но не лежит на отрезке  $AC$ . Докажите, что  $\angle EAC = \angle ACE$ .
- 5) Два прямоугольных треугольника  $BOK$  и  $COL$ , где углы  $BOK$  и  $COL$  прямые, имеют общую вершину  $O$  (см. рис. справа). Точки  $A$  и  $D$  лежат на сторонах  $OK$  и  $OL$  соответственно, причем  $\angle KAB = \angle CDL$ ,  $AO = OD$  и  $AK = DL$ . Докажите, что  $KB = CL$ .



- 6) Отрезки  $AD$  и  $BE$  пересекаются в точке  $C$ ,  $\angle BAC = \angle DEC$ . Углы, смежные с углами  $ABC$  и  $CDE$ , равны между собой,  $AB = DE$ . Докажите, что  $\triangle ABE = \triangle ADE$  (см. рис. слева).
- 7) В треугольниках  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$   $BC = B_1C_1$ ,  $\angle C = \angle C_1$  и  $AB + AC = A_1B_1 + A_1C_1$ ,  $BD$  и  $B_1D_1$  – медианы этих треугольников. Докажите, что  $BD = B_1D_1$ .
- 8) Докажите равенство треугольников по медиане и углам, на которые медиана разбивает угол треугольника.

### ДЗ №7. И снова треугольники!

- 1) В параллелограмме  $ABCD$  проведена диагональ  $AC$ . Докажите, что  $\angle ACB = \angle CAD$ .
- 2) На отрезке  $KL$  построены два равнобедренных треугольника  $KLM$  и  $KLN$ . Вершины этих треугольников соединены прямой  $MN$ . Докажите, что  $KL \perp MN$ , если
- треугольники построены по разные стороны от  $KL$ ;
  - треугольники построены по одну сторону от  $KL$ .
- Да, это проверка того, как вы слушали на занятии, не удивляйтесь!*
- 3) В треугольнике  $ABC$  на продолжении стороны  $BC$  за точку  $C$  отложен отрезок  $CD$ , равный  $CA$ , точки  $A$  и  $D$  соединены отрезком,  $CE$  – биссектриса треугольника  $ABC$ , а  $CF$  – медиана треугольника  $ACD$ . Докажите, что  $CF \perp CE$ .
- 4) На одной стороне угла с вершиной  $O$  отмечены точки  $K$  и  $M$ , а на другой –  $L$  и  $N$  так, что  $OK = OL$  и  $OM = ON$ . Отрезки  $KN$  и  $LM$  пересекаются в точке  $X$ .
- Докажите, что  $XM = XN$ .
  - Докажите, что  $KL \parallel MN$ .
- 5) Паучок очень голодный и заметил муху. Как ему быстрее всего до нее добраться, если:
- ему надо по пути зайти на прямую  $a$  (рис. 1);
  - ему надо обойти все стены своего дома, а муха прилетает на место паучка (рис. 2);
  - они оба живут на кубе и могут перемещаться только по его поверхности (рис. 3)?

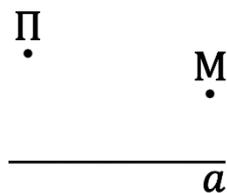


рисунок 1

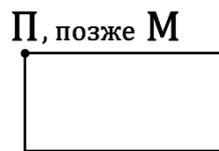


рисунок 2

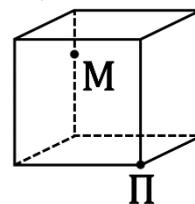


рисунок 3

*Обратите внимание, что муха спит и не двигается, а в пункте Б) попадание в вершину засчитывается как посещение двух сторон прямоугольника.*

*Обоснуйте свои ответы, а в пункте В) не забудьте также нарисовать итоговый путь паука на кубе!*