Мини-темы

Принцип Дирихле

КР №1. Дед Дирихле и зайцы

1) Докажите, что в любой футбольной команде есть два игрока, которые родились в один день недели.
2) В классе учится 30 человек. Правда ли, что обязательно среди них есть трое учеников, которые родились в одном месяце?
3) Докажите, что среди любых 7 натуральных чисел можно выбрать 3, сумма которых делится на 3.
4) В лесу растет миллион елок. Известно, что на каждой елке не более 999999 иголок. Верно ли, что в лесу есть елки с равным количеством иголок?
5) Дано 12 целых чисел. Докажите, что среди них найдутся 2, разность которых делится на 11.

ДЗ №1. Дирихле и не только

0) Первый вторник месяца Митя провел в Смоленске, а первый вторник после первого понедельника – в Вологде. В следующем месяце Митя первый вторник провел во Пскове, а первый вторник после первого понедельника – во Владимире. Сможете ли вы определить, какого числа и какого месяца Митя был в каждом из городов?
1) Среди 40 кувшинов, с которыми атаман разбойников приехал в гости к Али-Бабе, нашлись два кувшина разной формы и два кувшина разного цвета. Докажите, что среди них найдутся два кувшина одновременно и разной формы, и разного цвета.
2) Как-то раз Таня ехала в поезде. Чтобы не скучать, она стала зашифровывать названия разных городов, заменяя буквы их порядковыми номерами в алфавите. Когда Таня за шифровала пункты прибытия и отправления поезда, то с удивлением обнаружила, что они записываются с помощью всего лишь двух цифр: $21221 - 211221$. Откуда и куда шел поезд?
3) Каждый из учеников класса занимается не более чем в двух кружках, причем для любой пары учеников существует кружок, в котором они занимаются вместе. Докажите, что найдется кружок, в котором занимается не менее двух третей всего класса.
4) Можно ли таблицу $n \times n$ заполнить числами $-1, 0, 1$ так, чтобы суммы во всех строках, во всех столбцах и на главных диагоналях были различны?
5) Дано 8 различных натуральных чисел, не больших 15. Докажите, что среди их положительных попарных разностей есть три одинаковых.

Инвариант

КР №2. Наличие классной работы также является инвариантом!

1) На доске написаны числа $1, 2, 3, \ldots, 19, 20$. Разрешается стереть любые числа A и B, а вместо них написать число $A + B - 1$. Какое число может остаться на доске после 9 таких операций? А в конце?
2) Разменный автомат меняет одну монету на пять других. Можно ли с его помощью разменять 20 монет по одному рублю на 2016 монет? А 2014?
3) На доске написаны числа $1, 2, 3, \ldots, 2017$. За ход разрешается стереть любые два числа и написать их разность. Можно ли добиться того, чтобы в итоге остался 0?
4) В шахматной доске
   А) 8×8;
   Б) 3×3;
   одна угловая клетка закрашена черным цветом, а остальные – белым. Можно ли с помощью перекрашивания строк и столбцов закрасить всю таблицу в один цвет? При перекрашивании цвета всех задействованных клеток меняются на противоположные.
5) В алфавите языка племени УЫУ всего две буквы: У и Ы, причем этот язык обладает такими свойствами: если из слова выкинуть стоящие рядом буквы УЫ, то смысл слова не изменится. Точно так же смысл слова не изменится при добавлении в любое место слова буквосочетания ЫУ или УУЫЫ. Можно ли утверждать, что слова УЫЫ и ЫУУ имеют одинаковый смысл?

6) Клетки доски 9×9 покрашены в шахматном порядке. Разрешается перекрашивать в противоположный цвет любые две соседние клетки. Можно ли с помощью таких операций перекрасить всю доску в черный цвет? А в белый? Известно, что угловые клетки окрашены в черный цвет.

7) На острове Серобуромалин обитают 13 серых, 15 бурых и 17 малиновых хамелеонов. Если встречаются два хамелеона разного цвета, то они одновременно меняют свой цвет на третий (серый и бурый становятся оба малиновыми и т.п.). Может ли случиться так, что через некоторое время все хамелеоны будут одного цвета?

ДЗ №2. Инварианты

1) Дана шахматная доска. Разрешается перекрасить в другой цвет сразу все клетки, расположенные внутри квадрата 2×2. Может ли при этом на доске остаться ровно одна черная клетка?

2) На вешалке висят 20 платков. По очереди подходят 17 девочек, и каждая либо снимает, либо вешает один платок. Могло ли после ухода девочек остаться
   А) 10;
   Б) 11;
   В) 39 платков?

3) Написанное на доске четырехзначное число можно заменить на другое, прибавив к двум его соседним цифрам по 1, если ни одна из этих цифр не равна 9, либо вычтя из соседних цифр по единице, если ни одна из них не равна 0. Можно ли с помощью таких операций из числа 1234 получить число 2002?

4) На доске написаны числа $1, 2, 3, \dots, 19, 20$. Разрешается стереть любые числа A и B, а вместо них написать число $AB + A + B$. Какое число может остаться на доске после 19 таких операций?

5) В реке плавает 3 крокодила. В реку попали еще 4 крокодила. Какого они цвета?

6) В каждой клетке шахматной доски 5×5 сидит по кузнечику. По свистку каждый кузнечик перепрыгнул на соседнюю (по горизонтали или вертикали) клетку. Могло ли оказаться, что в каждой клетке опять сидит по кузнечику?

7) На столе лежит куча из 637 ракушек. Из нее убирают одну ракушку и кучу делят на две (не обязательно поровну). Затем из какой-нибудь кучи, содержащей больше одной ракушки, снова убирают одну ракушку и снова кучу делят на две. И так далее. Можно ли через несколько ходов оставить на столе только кучи, состоящие из трех ракушек?

8) Можно ли ходом коня обойти все клетки шахматной доски, начав с клетки a1, а закончив в h8, и побывав на каждой клетке доски ровно один раз?

9) Круг разделен на 6 секторов, в котором по часовой стрелке стоят числа: $1, 0, 1, 0, 0, 0$. Разрешается прибавить по единице к любым числам, стоящим в двух соседних секторах. Можно ли сделать все числа равными?

10) Разменный автомат меняет одну монету либо на 7, либо на 5 других. Можно ли с его помощью разменять металлический рубль на 26 других монет?

ДЗ №3. Про все подряд

1) В четырехугольнике $ABCD$ точки E, F, G – середины стороны AB, BC и AD соответственно. При этом $GE \perp AB$, $GF \perp BC$, а $\angle ABC = 96°$. Найдите $\angle ACD$.

2) В каждой клетке таблицы 3×3 стоит одно из чисел $1, 2, 3$. ПД посчитал сумму чисел в каждой строке и в каждом столбце. Какое наибольшее количество различных сумм он мог получить?

3) У двоих детей есть шоколадка размером $m \times n$. Они играют в такую игру – по очереди отламывают кусок и съедают его. Проигрывает тот, кто не сможет разломать шоколадку. Кто победит при правильной игре, если разломы только прямолинейные, а дольки не делятся?

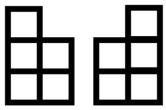
4) Прямоугольник 2014×1000 разбит прямыми, параллельными его сторонам, на квадратики со стороной 1. На сколько частей разобьется этот прямоугольник, если в нем провести еще и диагональ?

5) В шахматном турнире участвовали ученики 9 и 10 классов. Десятиклассников было в 10 раз больше, чем девятиклассников, и они набрали вместе в 4,5 раза больше очков, чем все девятиклассники. Сколько очков набрали девятиклассники?

6) Сколько точных квадратов и точных кубов среди натуральных чисел, меньших миллиона?

Олимпиада ОДО для 6 класса

1) Из холодного крана таз наполняется за 1 минуту, а из горячего – за 1,5 минуты. Костя включил горячую воду. Через сколько секунд он должен включить холодную воду (не выключая горячую), чтобы к моменту наполнения в тазу оказалось поровну горячей и холодной воды?
2) Паша и Таня сыграли тысячу партий в крестики-нолики на поле 3×3, причем Таня всегда играла крестиками. Ребята упорные и не сдаются, пока не заполнят поле до конца. Докажите, что какие-то две партии были совершенно одинаковыми. (Одинаковыми партиями назовем такие, в которых итоговое «заполнение» поля крестиками и ноликами окажется одинаковым).
3) 2016 бильярдных шаров покрасили в 7 цветов радуги (все цвета использованы). После этого на каждом шаре Юра написал количество шаров того же цвета. Чему равна сумма обратных чисел к написанным Юрой? Обратным к числу n называется число $1/n$.
4) В некотором царстве, в некотором государстве 2016 жителей. Непонятно зачем и непонятно почему в один из дней при встрече двух жителей один отдает другому пять серебряных монет, а второй первому – шесть золотых. На следующий день каждый из них подсчитал, что он отдал 300 монет. Могло ли такое быть?
5) Сможет ли Леша разрезать прямоугольник 10×2016 на «домики»? «Домиком» назовем любую из двух фигур справа.



ДЗ №4. Математический коктейль

1) Незнайка лжет по понедельникам, вторникам и пятницам, а в остальные дни недели говорит правду. В какие дни недели Незнайка может сказать: «Я лгал позавчера и буду лгать послезавтра»?
2) На острове $\frac{2}{3}$ всех мужчин женаты и $\frac{3}{5}$ всех женщин замужем. Какая доля населения острова состоит в браке?
3) Найдите наименьшее натуральное n такое, что все 73 дроби
$$\frac{19}{n+21}, \frac{20}{n+22}, \dots, \frac{91}{n+93}$$
были несократимы.
4) Антон, Артем и Вера решили вместе 100 задач по математике. Каждый из них решил 60 задач. Назовем задачу трудной, если ее решил только один человек, и легкой, если ее решили все трое. Насколько отличается количество трудных задач от количества легких?
5) Найдите количество прямоугольников, составленных из клеток шахматной доски, которые содержат поле c4. (Одна клетка – это тоже прямоугольник.)
6) В международном лагере четное количество участников (большее двух). Каждый владеет определенным набором языков. Известно, что любые трое могут общаться (возможно, один переводит двум другим). Докажите, что участников можно разбить на пары, в каждой из которых найдется общий язык.

КР №3. Повторная сборная солянка

1) У нумизмата Феди есть монеты диаметром не больше 10 см, которые лежат в коробке 30×70 см (в один слой). Феде подарили монету диаметром 25 см. Докажите, что теперь все монеты поместятся в коробку 55×55 см.
2) У Коли есть несколько игрушечных трехэтажных домиков. Каждый этаж в домике – красный, зеленый или синий.

   «У меня все домики разные!» – гордо говорит Коля.

   А еще у Коли есть друг Толя, дальтоник, который не различает красный и зеленый цвета.

   «На мой взгляд, – мрачно произносит Толя, – все твои домики одинаковые.»

   Какое максимальное количество домиков может быть у Коли?
3) Разность двух натуральных чисел умножили на их произведение. Могло ли получиться 45045?
4) Вова говорит, что сумел разрезать треугольник на восемь одинаковых треугольников. Может ли такое быть?
5) За круглым столом сидят 17 человек – рыцари и лжецы. Рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут. Все семнадцать по очереди произнесли фразу: «Оба моих соседа – лжецы». Сколько рыцарей за столом?

6) «Скоро уже электричка», – подумал Андрей, выходя из дома. – «Если я пойду на станцию со скоростью 4 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$, то опоздаю на три минуты. Зато если идти со скоростью 6 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$, то останется три лишних минуты, чтобы купить билет». На каком расстоянии станция находится от дома?
7) Анечка выписала те из чисел от 1 до 700, которые не делятся на 7. Докажите, что сумма Аниных чисел делится на 7.
8) Вера и Аня посещают математический кружок, в котором больше 91% мальчиков. Какова минимально возможная численность кружка?

Проценты

КР №4. Классные проценты

— *Так это же известная задача!*
— *А как она решается?*
— *Да нет! Условие известное, а решения я не знаю.*

1) Ученик прочитал 138 страниц, что составляет 23% числа всех страниц в книге. Сколько страниц в книге?
2) Разложите 80 тетрадей на две стопки так, чтобы число тетрадей одной из них составило 60% числа тетрадей другой стопки.
3) Когда из первого бидона перелили во второй 12,5% находившегося в первом бидоне молока, то молока в бидонах стало поровну, по 35 литров. Сколько молока было во втором бидоне?
4) Множимое увеличили на 50%, а множитель уменьшили на 50%. Как изменилось произведение?
5) Что больше: 15,43% от 5 или 5% от 15,43?
6) Как изменится цена товара, если сначала ее увеличить на 100%, а затем уменьшить на 50%?
7) Цену картофеля повысили на 20%. Через некоторое время ее понизили на 20%. Когда картофель стоил дешевле: до повышения или после снижения?
8) A, B и C состязались в беге на 100 м. Когда A финишировал, B отставал от него на 10 м. Когда B финишировал, C отставал на 10 м. На сколько отставал C от A, когда A закончил бег?
9) В одном магазине цены уменьшили на 10%, а потом еще на 10% (от нового уровня). А в другом цены просто сразу снизили на 20%. Что выгоднее для покупателя?
10) За весну Обломов сбавил в весе 25%, за лето прибавил 20%, за осень похудел на 10%, а за зиму прибавил 20%. Похудел он или поправился за год?
11) Цены снизили на 20%. На сколько процентов больше товара можно купить на ту же зарплату?
12) Вода Тихого Океана содержит 3,5% соли (по весу). Сколько пресной воды надо прибавить к 40 кг такой воды, чтобы содержание соли в смеси составило 0,5%?
13) Из 22 кг свежих грибов получается 2,5 кг сухих грибов, содержащих 12% воды. Каков процент воды в свежих грибах?
14) Алик, Боря и Вася собирали грибы. Боря собрал грибов на 20% больше, чем Алик, но на 20% меньше, чем Вася. На сколько процентов больше, чем Алик, собрал грибов Вася?

Все 100% от ДЗ №5

15) Предприятие получило задание за два года снизить на 51% объем выпускаемой продукции. Каждый год требуют снижать на одно и то же число процентов. На сколько?
16) В сосуде было 20 литров спирта. Часть его отлили и долили столько же воды. Затем, перемешав, отлили такую же часть и сосуд опять долили водой. В сосуде спирта оказалось втрое меньше, чем воды. Какую часть отливали?
17) Число 51,2 трижды увеличивали на одно и то же число процентов, а затем трижды уменьшали на то же самое, число процентов. В результате получилось число 21,6. На сколько процентов увеличивали, а затем уменьшали это число?
18) М. В. Ломоносов тратил одну денежку на хлеб и квас. Когда цены выросли на 20%, на ту же денежку он приобретал полхлеба и квас. Хватит ли той же денежки хотя бы на квас, если цены еще раз вырастут на 20%?
19) Пройдя половину пути, катер увеличил скорость на 25% и поэтому прибыл на полчаса раньше. Сколько времени он двигался?

20) В сентябре проездной билет на метро стоил 800 рублей. В октябре стоимость билета увеличили, в результате чего число проданных билетов уменьшилось на 25%, а выручка от их продажи уменьшилась на 6,25%. Сколько стал стоить проездной билет в октябре?

КР №5. Разбор вступительной олимпиады ОДО в 8 класс

1) Вася взял 10 карточек с цифрами от 0 до 9 и сделал из них десятизначное составное число. Васина собачка Тузик утащила самую правую карточку, но оставшееся девятизначное число снова оказалось составным. Собачка прибегала еще 8 раз, уносила каждый раз самую правую карточку, но ни разу после ее ухода не оставалось простое число. Какое число мог придумать Вася?
2) Найдите значение выражения:
$$(8 + 222 \cdot 444 \cdot 888 + 444 \cdot 888 \cdot 1776)/(2 \cdot 4 \cdot 8 + 444 \cdot 888 \cdot 1776 + 888 \cdot 1776 \cdot 3552).$$
3) Гоша покупал в магазине один килограмм сыра и хлеб. Он не заметил, что цена сыра указана за 100 граммов, и посчитал, что должен заплатить 84 рубля. Но на кассе с него взяли 471 рубль. Сколько стоит килограмм сыра и хлеб по отдельности?
4) В автобусе ехало меньше 100 человек, причем сидящих пассажиров было вдвое больше числа стоящих. На остановке 4% пассажиров вышло. Сколько пассажиров осталось в автобусе?
5) Дан неравнобедренный прямоугольный треугольник. Назовем прямую «замечательной», если все три вершины треугольника одинаково удалены от нее.
   А) Нарисуйте хотя бы одну «замечательную» прямую.
   Б) Сколько всего «замечательных» прямых можно провести?
6) Сергей Юрьевич выписал на доске все 5-значные числа, из которых вычеркиванием одной цифры можно получить число 1111, а Евгений Николаевич – все числа для числа 1234. У кого из них получилось больше чисел?

ДЗ №6. Подборка задач из вступительной олимпиады ОДО в 9 и 10 классы

7) Расположите алгебраические выражения $a + b$, $a - b$, ab и ${}^{a}/_{b}$ в порядке возрастания их числовых значений, если $a = -0{,}8$ и $b = {}^{2}/_{3}$.
8) В соревновании участвуют 4 футбольные команды. Каждая команда встречается с каждой другой один раз. За победу команде начисляется 3 очка, за ничью – 1 очко, проигрыш – 0. Команды набрали 5, 3, 3 и 2 очка. Сколько было ничьих?
9) Три друга хотели купить книгу за 170 рублей, но ни у кого не набралось нужной суммы. Первый сказал: «Дайте мне каждый по половине своих денег, и мне как раз хватит денег на книгу». Второй говорит: «Дайте мне каждый по трети своих денег, и мне как раз хватит денег на книгу». Третий говорит: «Дайте мне по четверти своих денег, и мне как раз хватит денег на книгу». Сколько денег было у каждого?
10) В равнобедренной трапеции $ABCD$ диагональ AC является биссектрисой угла A и перпендикулярна боковой стороне CD. Найдите площадь трапеции, если $AD = 12$.
11) Группа удачливых кладоискателей нашла клад – сундук с золотыми монетами. Один из них взял себе сто золотых монет и десятую часть оставшегося клада. Второй взял 200 монет и десятую часть остатка, третий – 300 монет и десятую часть остатка, и так далее. Оказалось, что клад поделили поровну. Определите, сколько было кладоискателей и сколько монет они нашли.
12*) Жираф бродит по загону, огражденному высоким забором. Загон имеет форму прямоугольного треугольника со сторонами 20 м, 16 м и 12 м. Жираф может есть траву всюду внутри загона, а также снаружи на расстоянии не более 2 м от забора. Какова площадь участка травы, доступного жирафу?

КР №6. МартБой

1) Калькулятор «Чебурашка» умеет складывать, вычитать, брать обратное число, запоминать промежуточные результаты. Новые числа могут появиться только в результате проделанных операций. Изначально в нем числа 19 и 99. Можно ли получить в нем число 1?
2) Гриб называется плохим, если в нем больше 11 червяков. Червяк называется тощим, если он съел не более ${}^{1}/_{5}$ гриба, в котором он живет. Четверть всех грибов в лесу – плохие. Докажите, что не менее трети всех червяков – тощие.

3) В таблице 4×4 в клетке, соседней с угловой, стоит плюс, а остальных клетках – минусы. Каждый ход мы можем выбрать одну диагональ, включая одноклеточные, и поменять каждый знак в выбранной диагонали на противоположный. Можем ли мы в какой-то момент получить таблицу со всеми плюсами?

4) На диагонали BD выпуклого четырехугольника $ABCD$ отмечена точка E, известно, что $AB = CE$, угол ABD равен углу BCE равен углу ECD. И угол DAB равен ABC. Докажите, что треугольник BCD равнобедренный.

5) Дед Мороз принес на кружок 13 мешков с конфетами. За один вопрос дети могут узнать общий вес двух мешков. За какое минимальное количество вопросов можно узнать общий вес всех 13 мешков?

6) Даны различные простые числа a, b, c. Доказать, что $ab + bc + ca + 29 \leq 2abc$.

Чистовик

1) Найдите НОД чисел $2n + 13$ и $n + 7$.

2) Сколько шестизначных чисел можно составить из цифр от 1 до 9, если каждое число должно состоять из трех четных и трех нечетных цифр, причем никакие две цифры в нем не повторяются?

3) Сколько способов выбрать четыре пары из 100 человек?

4) На дне озера бьют ключи. Стадо из 183 слонов могло бы выпить озеро за один день, а стадо из 37 слонов – за 5 дней. За сколько дней выпьет озеро один слон?

5) На окружности расставлено 20 точек. За ход разрешается соединить любые две из них отрезком, не пересекающим отрезков, проведенных ранее. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

6) Имеется две кучки камней: в первой – 7 камней, во второй – 5. За ход разрешается брать любое количество камней из одной кучки или поровну камней из обеих кучек. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

7) На отрезке KL построены два равнобедренных треугольника KLM и KLN. Вершины этих треугольников соединены прямой MN. Докажите, что $KL \perp MN$, если треугольники могли быть построены как по одну сторону от KL, так и по разные стороны.

8) В каждой строчке и каждом столбце доски 8×8 стоит по две фишки. Докажите, что их можно раскрасить в два цвета так, чтобы в каждом столбце и в каждой строчке фишки были раскрашены в разные цвета.

9) Докажите, что среди любых 7 натуральных чисел можно выбрать 3, сумма которых делится на 3.

10) В шести секторах круга было 6 шашек, по одной в каждом секторе. Одним ходом разрешается любые две шашки передвинуть в соседние секторы так, что одна движется по часовой стрелке, а другая – против часовой стрелки. Можно ли собрать такими ходами все шашки в одном секторе?

11) Периметр квадрата увеличили на 40%, затем периметр полученного квадрата уменьшили на 40%. У какого из трех квадратов *площадь* наименьшая?

12) Буратино записал трехзначное число без нулей, все цифры которого различны. Затем он написал все числа (включая исходное), которые получаются из этого числа перестановкой цифр. Кот Базилио эти числа не видел, но пронюхал, что сумма цифр первого числа равна 15. Помогите Коту Базилио вычислить сумму всех записанных чисел.

13) Докажите, что значение выражения $\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{2016}\right)$ больше 1000.