

Начала алгебры

Алгебраическая разминка. ДЗ №1-2

Авторитет происходит от разума, а не разум от авторитета;
всякий авторитет, не признанный разумом – бессилён.

В. Скотт

- 1) В диване живут клопы и блохи. Андрей лежит на диване и рассуждает: если клопов станет в некоторое число раз больше, то всего насекомых будет 2012, а если блох станет во столько же раз больше, а число клопов не изменится, то всего насекомых будет 2011. Сколько же насекомых кусают Андрея живут в диване сейчас?
- 2) Целые числа a и b можно представить в виде суммы квадратов целых чисел. Докажите, что так же можно представить и их произведение.
- 3) Слабо разложить на множители? :P
 - А) $x^2 - 5x + 6$;
 - Б) $16a^3 + 8a^2b + b^2a$;
 - В) $16a^3 + 48a^2b + 48ab^2 + 16b^3$.
- 4) Имеются две дроби, одна из которых в два раза больше другой. Каждую дробь Стас возвел в степень 4 и результаты сложил. Никита же возвел их в степень 3 и результаты сложил. Обе суммы оказались равны. Найдите эту пару дробей.
- 5) Сократите дроби:
 - А) $\frac{3x^2-7x+2}{2-6x}$;
 - Б) $\frac{16a^2-8a+1}{1-4a+x-4ax}$;
 - В) $\frac{8 \cdot 100^n}{2^{2n+1} \cdot 5^{2n-2}}$;
 - Г) $\frac{2x-3x^2}{3x^2+7x-6}$;
 - Д) $\frac{b^2-a^2}{a^2b+2b-ab^2-2a}$;
 - Е) $\frac{5^{n+1}-5^{n-1}}{2 \cdot 5^n}$.

Вступительная олимпиада в ФТШ 2016

Классная работа

- 1) Большой прямоугольник разбит четырьмя линиями, параллельными основаниям, на 9 прямоугольников, периметры пяти из которых указаны на рисунке.
 - А) Найдите периметр левого верхнего прямоугольника.
 - Б) Найдите периметр всего прямоугольника.
- 2) На одной из чашек весов лежит груз массой 27 грамм. Вася последовательно кладет на любую из двух чашек весов по одной гирьке. Масса первой гирьки равна 1 грамму, а каждая следующая гирька на один грамм тяжелее предыдущей. Какое наименьшее число гирь должен положить Вася для того, чтобы уравновесить весы?
- 3) В доме двое механических часов – одни отстают на 15 минут в сутки, а другие на 10 минут в сутки спешат. Сегодня в полдень и те, и другие часы показывали правильное время. Когда в следующий раз они снова одновременно правильно покажут время?

?		32
	35	40
9	21	

Домашняя работа

- 4) В треугольнике ABC угол C в три раза больше угла A . На стороне AB взята такая точка D , что $BD = BC$. Найдите CD , если $AD = 4$.
- 5) Юра сложил два числа (необязательно равных) – получил 2014, Костя перемножил эти же два числа – получил 2015. Валере этого показалось мало, поэтому он увеличил каждое из Юриных чисел на 1 и только затем перемножил. Сколько получилось у Валеры?
- 6) В шахматном турнире каждый участник сыграл с каждым по одной партии. Победитель выиграл у всех и набрал в 5 раз меньше очков, чем все остальные вместе. Сколько было участников? За победу участник получал 1 очко, а за ничью – 0,5 очка.
- 7) Вася заметил, что $\sqrt{3 + \frac{3}{8}} = 3 \cdot \sqrt{\frac{3}{8}}$. Петя считает, что таких натуральных чисел a и b , что

$$\sqrt{a + \frac{a}{b}} = a \cdot \sqrt{\frac{a}{b}}$$

больше не существует. Прав ли он?

- 8) Три ученика лицея ФТШ – Иванов, Петров и Сидоров – ехали в разных вагонах одного и того же поезда метро. Подъезжая к станции «Выборгская», каждый из них стал подсчитывать количество колонн, мимо которых он проехал. Один насчитал 15 колонн, второй – 12, а третий – 7 колонн. Когда поезд опять начал двигаться, ученики начали считать оставшиеся колонны, причем Иванов насчитал в три раза больше колонн, чем Петров. Сколько колонн насчитал Сидоров?
- 9) Василию, Петру, Семену и их женам Наталье, Ирине и Анне вместе 151 год. Каждый муж старше жены на 5 лет. Василий старше Ирины на год, Наталье и Василию вместе 48 лет, а Семену и Наталье вместе 52 года. Кто на ком женат, и кому сколько лет? Возраст должен быть выражен в целых числах.

Алгебра forever again! ДЗ №3

- 1) Вычислите выражение:
 А) $(109^2 - 13298 + 61^2) : (79^2 + 73^2 - 49^2 - 55^2)$; Б) $\frac{67^3 + 52^3}{119} - 67 \cdot 52$;
 В) $\left(\frac{79^3 - 41^3}{38} + 79 \cdot 41\right) : (133,5^2 - 58,5^2)$; Г) $(94,5^2 - 30,5^2) : \left(\frac{69^3 + 29^3}{98} - 69 \cdot 29\right)$.
- 2) Разложите на множители:
 А) $p^2 - pq - 2q^2$; Б) $a^2 + 7ab + 6b^2$.
- 3) Решите уравнение:
 А) $p^3 - p^2 - 4p + 4 = 0$; Б) $9m^2 - 30mk^2 + 16k^4 = 0$.

Самостоятельный алгебраический марафон. КР №1

- 1) Разложите на множители:
 А) $25a^2 - 20ab + 4b^2$; Б) $x^2 + 7x + 12$; В) $m^2 + 7mn + 6n^2$;
 Г) $(x - 12)^3 - 125$; Д) $k^3 + 8l^3 + k^2 - 2kl + 4l^2$; Е) $30y^2 + 10c - 25cy - 12y$.
- 2) Решите уравнения:
 А) $(7d - 13)^2 - (9d - 25)^2 = 0$; Б) $x^3 + x^2 - 4x - 4 = 0$; В) $9m^2 + 0,27m = 0$.
- 3) Вычислите наиболее рациональным способом:
 А) $2,7 \cdot 6,2 - 9,3 \cdot 1,2 + 6,2 \cdot 9,3 - 1,2 \cdot 2,7$; Б) $\frac{9^{23} + 9^{22} + 9^{21}}{27^{14} - 27^{13}}$; В) $\frac{23^3 - 11^3}{23^2 + 253 + 11^2}$.

Для самых умных алгебраистов (решать только после заданий 1–3)

- 4*) Определите, в каких границах может быть выражение
 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - x_1x_2 - x_1x_3 - x_1x_4 - x_2x_3 - x_2x_4 - x_3x_4 + x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 - x_1x_2x_3x_4$,
 если каждая переменная по модулю не больше 1:

$$-1 \leq x_1, x_2, x_3, x_4 \leq 1.$$

В решении не забудьте привести примеры, когда эти границы достигаются, и доказать, что выбранные вами границы верные.

Опять алгебра??? ДЗ №4

- 1) Вычислите значение выражения $(a + 1)(b + 1) - (a - 1)(b - 1)$, если $a + b = 9$.
- 2) Сократите дроби:
 А) $\frac{44c^4d^8 - 44c^3d^9}{100c^5d^5 - 100c^6d^4}$; Б) $\frac{x^ny^{2n+1} + x^{n+1}y^{2n}}{x^{2n+2}y^n - x^{2n}y^{n+2}}$; В) $\frac{72a^2bc^3 - 96a^4bc^2 + 32a^6bc}{16a^5b^2c^3 - 36ab^2c^5}$.
- 3) Разложите на множители:
 А) $1 - m^2 - 2mn - n^2$; Б) $27x^3 - 18x^2y - 12xy^2 + 8y^3$; В) $p^4 - p^2q^3 - 2q^6$.

Не опят*, а снова! ДЗ №5

Замените знаки «*» такими одночленами, чтобы выполнялись равенства:

- 1) $a^2 + * + b^2 = (a + b)^2$; 2) $* - 56a + 49 = (4a - 7)^2$;
 3) $b^2 - 20b + * = (* - 10)^2$; 4) $25a^2 + * + \frac{1}{4}b^2 = \left(* + \frac{1}{2}b\right)^2$;
 5) $* + 56ab + 49b^2 = (4a + *)^2$; 6) $25z^2 - * + * = (* - 8t)^2$;
 7) $* + 42ac + 49c^2 = (* + *)^2$; 8) $* - 70pq + * = (7p - *)^2$.

Ну наконец-то не алгебра. ДЗ №6

- 1) Что больше:

$$\underbrace{2^{2^{2^{\dots}}}}_{100 \text{ двоек}} \quad \text{или} \quad \underbrace{3^{3^{3^{\dots}}}}_{99 \text{ троек}} ?$$

