

Алгебраические зОДЮчи

- 1) Решите уравнение: $\left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{6}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}\right) - \frac{9}{4} = 0$.
- 2) Упростите выражение: $(4p + 7q)(7p - 4q) - (7p + 4q)(4p - 7q) - (2pq - 1)^2$.
- 3) Решите уравнение для всех неотрицательных x : $20[x] = 17\{x\}$ ($[x]$ – целая часть числа, то есть наибольшее число, не превосходящее данного; $\{x\}$ – дробная часть числа, то есть число, равное $x - [x]$).
- 4) Пусть a, b, c – целые числа, удовлетворяющие условию $a + b + c = 20$. Петя придумал уравнение $(x - a)(x - b)(x - c) - 17 = 0$, имеющее целый корень, и скрывает его от нас. Найдите его.
- 5) Школьник Вася решил пример на действия с десятичными дробями и записал его в тетрадь. Его младший брат Петя знает пока всего одну цифру. Везде, где эта цифра встретилась в примере, он заменил ее крестиком, после чего пример стал выглядеть так:

$$x, x : 0, xx + x0x, x : 100 - 0,0xx = 16.$$

Какую цифру знает Петя? Предложите все возможные варианты.

- 6) Какое из чисел больше: $1,1^2 - 1,1^3$ или $\left(1\frac{1}{7}\right)^2 - \left(1\frac{1}{7}\right)^3$?
- 7) Решите неравенство: $(3 - \sqrt{10})(x - 3) > 0$.
- 8) График функции $y = -2x^2 + bx + c$ проходит через точки $(2; 0)$ и $(1; 2)$. Найдите b и c .
- 9) Даны натуральные числа a, b, c . Известно, что все числа $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$, $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c}$, $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ и $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} - \frac{1}{c}$ – целые. Докажите, что хотя бы одно из чисел a, b или c равно 1.
- 10) Петя снова написал на доске числа a, b, c . А Даня вместо них написал соответственно сумму, произведение и сумму попарных произведений этих чисел. Как бы странно это не показалось, но получились те же числа. Какие же числа написаны на доске?
- 11) Сумма двух чисел равна 2017. Если зачеркнуть последнюю цифру первого числа, то получится второе. Найдите эти числа.
- 12) Числа от 1 до 37 записаны в строку так, что сумма любых первых нескольких чисел делится на следующее за ними число. Какое число стоит на третьем месте, если на первом месте записано число 37, а на втором – 1.
- 13) Решите систему уравнений, если известно, что x, y и z – целые числа:

$$\begin{cases} (x + 1)yz = 12; \\ (y + 1)zx = 4; \\ (z + 1)xy = 4. \end{cases}$$

- 14) Существуют ли такие целые числа x, y и z , для которых выполняется равенство $(x - y)^3 + (y - z)^3 + (z - x)^3 = 2015$?
- 15) Найдите все значения a , при которых точка $M(a; a + 3)$ лежит на графике, заданном уравнением $(y - 1)(2x - y - 1) = 0$.
- 16) Гаврила представил число 2015 как сумму n последовательных натуральных чисел. Чему может быть равно n , если известно, что n – число нечетное?
- 17) Решите уравнение: $(x + 2)^4 + 2x^2 + 8x - 16 = 0$.
- 18) Найдите значение выражения:

$$\frac{8 + 222 \cdot 444 \cdot 888 + 444 \cdot 888 \cdot 1776}{2 \cdot 4 \cdot 8 + 444 \cdot 888 \cdot 1776 + 888 \cdot 1776 \cdot 3552}$$

- 19) Расположите алгебраические выражения $a + b, a - b, ab$ и $\frac{a}{b}$ в порядке возрастания их числовых значений, если $a = -0,8$ и $b = \frac{2}{3}$.
- 20) Известно, что уравнения $x^2 + ax + b = 0$ и $x^2 + bx + a = 0$ имеют общий корень, и a не равно b . Чему равна сумма $a + b$?