

ДЗ №3: ОДО-Марафон

- 1) На гранях кубика написаны натуральные числа. На трёх гранях, имеющих общую вершину, написаны числа 35, 18 и 14. Числа на остальных гранях – простые. Какие это числа, если известно, что суммы чисел на каждой паре противоположных граней равны?
- 2) Король хочет построить 6 крепостей и соединить каждые две из них дорогой. Начертите такую схему расположения крепостей и дорог, чтобы на ней было только 3 перекрёстка и на каждом перекрёстке пересекались ровно две дороги.
- 3) В треугольнике MNK $\angle K = 37^\circ$, $\angle M = 69^\circ$, NP – биссектриса треугольника. Докажите, что $MP < PK$.
- 4) Решите систему уравнений, если известно, что x , y и z – целые числа:

$$\begin{cases} (x+1)yz = 12; \\ (y+1)zx = 4; \\ (z+1)xy = 4. \end{cases}$$

- 5) Сколько раз встречается цифра 1 в десятичной записи числа $9 + 99 + 999 + \dots + \underbrace{999 \dots 999}_{2014}$?
- 6) Даны 100 неотрицательных чисел. Произведение любых 30 из них меньше 1. Докажите, что произведение всех чисел меньше 1.
- 7) На доске написано двузначное число. Лёша сложил цифры этого числа и получил число, записанное одинаковыми цифрами. Костя сложил квадраты цифр исходного числа и получил число всего на 10 меньше исходного. Что это число написано на доске?
- 8) Решите уравнение: $\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 - 4\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 12 = 0$.
- 9) В треугольнике ABC из вершины C проведены медиана CM и высота CH . Найдите периметр треугольника CMH , если $AB = 5$, $AC = 4$, $BC = 3$.
- 10) Числитель и знаменатель некоторой дроби – натуральные числа. После того, как числитель дроби увеличили на 3, а знаменатель – на 2, было получено число, большее этой дроби. Могла ли эта дробь быть больше двух?
- 11) Точки пересечения графиков функций $y = x^2$ и $y = (b+1)x - b$ имеют целые координаты. Докажите, что точка пересечения прямой $y = (b-1)x - b$ с осью OY – тоже имеет целые координаты.
- 12) Решите уравнение: $\sqrt{x-1}(x-2) = 1 - \sqrt{x-1}$.