

# Рейтинг 1 – Четность. Делимость и остатки

## Первая встреча

- 1) В стакане находятся бактерии. Через секунду каждая из бактерий делится пополам, затем каждая из получившихся бактерий через секунду снова делится пополам и так далее. Через минуту стакан полон. Через какое время стакан был наполнен на четверть?
- 2) Из книги выпал кусок, первая страница которого имеет номер 328, а номер последней записывается теми же цифрами в каком-то другом порядке. Сколько страниц в выпавшем куске?
- 3) В мешке 24 килограмма гвоздей. Как, имея только весы без стрелки, отмерить 9 кг гвоздей?
- 4) Червяк ползет по столбу, начав путь от ее основания. Каждый день он проползает 4 см, а за ночь сползает вниз на 3. Когда он достигнет верхушки столба, если его высота равна 23 см?
- 5) В январе некоторого года было 4 пятницы и 4 понедельника. Каким днем недели было 20 число этого месяца?
- 6) Сколько клеток пересекает диагональ в прямоугольнике размером  $199 \times 991$ ?
- 7) Из числа 1234512345123451234512345 ... (2017 цифр) вычеркните 10 цифр так, чтобы оставшееся число было максимальным из возможных.
- 8) Петя говорит: «Позавчера мне еще было 10 лет, а в следующем году исполнится 13». Может ли такое быть?
- 9) Учитель рисует на бумаге несколько кружков и спрашивает: «Сколько здесь кружков?» «Семь», – отвечает ученик. «Правильно», – ответил учитель. «Так сколько здесь кружков?», – опять говорит учитель, уже другому ученику. «Пять», – отвечает тот. «Правильно», – снова говорит учитель. Так сколько кружков нарисовал учитель, если между своими вопросами он ничего не дорисовывал и не стирал?
- 10) Сын отца профессора разговаривает с отцом сына профессора, причем сам профессор в разговоре не участвует. Может ли такое быть?
- 11) По дороге цепочкой ползут три черепахи. «За мной ползут 2 черепахи», – говорит первая. «За мной ползет одна черепаха, и передо мной ползет одна черепаха», – говорит вторая. «Передо мной ползут 2 черепахи, и за мной одна», – говорит третья. Как такое может быть?
- 12) Из стакана молока три ложки содержимого переливают в стакан чая и тщательно размешивают смесь. Затем три ложки смеси переливают обратно в стакан с молоком. Теперь чего больше – чая в стакане с молоком или молока в стакане с чаем?
- 13) Составьте из цифр 1,2,3,4,5,6,7,8,9 магический квадрат, то есть разместите их в таблице  $3 \times 3$  так, чтобы
  - А) суммы;
  - Б) произведениячисел по строкам, столбцам и двум диагоналям были одинаковы.
- 14) В примере на сложение цифры заменили буквами (причем одинаковые цифры – одинаковыми буквами, а разные цифры – разными буквами) и получили  $\text{БУЛОК} + \text{БЫЛО} = \text{МНОГО}$ . Сколько же было булок, если их количество есть максимальное возможное значение число МНОГО?
- 15) Разведка звездной империи ФИГ – 45 перехватила секретное шифрованное сообщение враждебной планеты Медуза:  $\text{ДУРАК} + \text{УДАР} = \text{ДРАКА}$ . Известно, что разными буквами зашифрованы разные цифры, а одинаковыми – одинаковые. Два электронных думателя взялись найти решение и получили два разных ответа. Может ли такое быть или один из них надо сдать в переплавку?
- 16) Как разложить по семи кошелькам 127 рублевых монет так, чтобы любую сумму от 1 до 127 рублей можно было бы выдать, не открывая кошельков?
- 17) Разрежьте уголок (рис. 1) на 4 таких же уголка меньшего размера.
- 18) Из спичек сложена фигура (рис. 2). Как переложить две спички, чтобы получилось ровно 4 квадрата с длиной стороны, равной длине спички, и все спички являлись сторонами хотя бы одного квадрата?
- 19) Река шириной 4 метра делает поворот под прямым углом (рис. 3). Как переправиться через нее на другой берег, имея лишь две доски длиной 3 метра 90 см?
- 20) 10 монет выложены так, как изображено на рис. 4. Какое минимальное число монет нужно убрать, чтобы никакие три оставшиеся не лежали в вершинах равностороннего треугольника?
- 21) Расставьте числа 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4 так, чтобы между единицами была одна цифра, между двойками – две, и так далее.
- 22) Имеется 9 слитков золота и 11 слитков серебра. Их взвесили (золото – на левой чаше весов, серебро – на правой), и весы остались в равновесии. После того, как слиток золота переложили на правую чашу, а слиток серебра на левую, левая чаша стала легче на 13 ланов. Каков вес одного слитка золота?
- 23) Хитрый Петя нарисовал картинку 1 и зашифровал ее так:  $1) 7 \oplus 3 \rightarrow 4$ . Потом он нарисовал еще картинку и зашифровал их:  $5 \oplus 3 \rightarrow 4$ ,  $6 \oplus 4 \rightarrow 4$ ,  $8 \oplus 3 \rightarrow 4$ . Догадайтесь, какие еще картинку нарисовал Петя и проверьте, не ошибся ли он.



Рис. 1

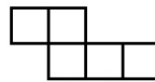


Рис. 2



Рис. 3

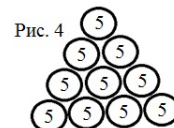


Рис. 4



## Четность, делимость и остатки. Классная работа №1

- 1) На плоскости расположены 11 шестеренок, замкнутых в круг. Могут ли все шестеренки вращаться одновременно?
- 2) На доске  $25 \times 25$  расставлены 25 шашек, причем их расположение симметрично относительно главной диагонали. Докажите, что одна из шашек расположена на диагонали.
- 3) В ряд выписаны числа от 1 до 10. Можно ли расставить между ними знаки «+» и «-» так, чтобы значение полученного выражения было равно 0?
- 4) Может ли прямая, не содержащая вершин 11-звенной замкнутой ломаной, пересекать все ее звенья?
- 5) Из набора домино выбросили все кости с «пустышками». Можно ли оставшиеся кости выложить в ряд?
- 6) Конь вышел с поля  $a1$  и через несколько ходов вернулся на него. Докажите, что он сделал четное число ходов.
- 7) Улитка ползет по плоскости с постоянной скоростью, каждые 15 минут поворачивая под прямым углом. Докажите, что вернуться в исходную точку она сможет лишь через целое число часов.
- 8) Число  $15A$  делится на 6. Делится ли само число  $A$  на 6?
- 9) Верно ли, что если натуральное число делится на 4 и 6, то оно делится на  $4 \cdot 6 = 24$ ?
- 10) Числа  $p$ ,  $2p + 1$ ,  $4p + 1$  – простые. Найдите  $p$ .
- 11) Найдите остаток от деления  $2^{100}$  на 3.
- 12) Найдите последнюю цифру числа  $9999^{9999}$ .
- 13) Решите уравнение в целых числах:  $x^2 - y^2 = 31$ .
- 14) К 2017-значному числу прибавили число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Докажите, что хотя бы одна цифра полученной суммы четна.

## Четность, делимость и остатки. Классная работа №2

- 1) На доске написаны числа  $1, 2, 3, \dots, 2017$ . Разрешается стереть с доски любые два числа и вместо них записать модуль их разности. В конце концов, на доске останется одно число. Может ли оно равняться нулю?
- 2) В народной дружке 100 человек и каждый вечер трое из них идут на дежурство. Может ли через некоторое время оказаться так, что каждый с каждым дежурил ровно 1 раз?
- 3) Может ли конь пройти с поля  $a1$  на поле  $h8$ , побывав по дороге на каждом из остальных полей ровно 1 раз?
- 4) Вася написал на доске пример на умножение двух натуральных чисел, а затем «зашифровал» его в ребус  $AB \cdot VG = DDEE$ . Докажите, что он где-то ошибся.
- 5) Миша купил общую тетрадь объемом 96 листов и пронумеровал страницы по порядку числами от 1 до 192. Хулиган Влад вырвал из этой тетради блок из подряд идущих 25 листов и сложил все 50 чисел, которые на них написаны. Могло ли у него получиться 2018?
- 6) Может ли  $n!$  оканчиваться ровно пятью нулями?

## Четность, делимость и остатки. Домашняя работа

- 1) ПД выписал на доску девятизначное число, в котором использовал все цифры от 1 до 9. ТА сразу заметила, что это число составное. Права ли ТА?
- 2) Знайдіть найменше натуральне  $n$  таке, що сума  $n$  доданків

$$S = 1 + 11 + 111 + \dots + \underbrace{11 \dots 1}_n$$

націло ділиться на число 15.

(LXVII Киевская городская олимпиада юных математиков)

- 3) Числа от 1 до 13 выписаны в ряд таким образом, что каждое число делит сумму всех предыдущих. Может ли на последнем месте стоять число 5?
- 4) Докажите, что число  $\overline{abc} - \overline{cba} : 99$ .
- 5) Рассмотрим ряд простых чисел, начиная с тройки:  $3, 5, 7, 11, 13, \dots$  Докажите, что сумма любых двух соседних чисел в этом ряду раскладывается не менее чем на
  - А) два простых множителя;
  - Б) три простых множителя.