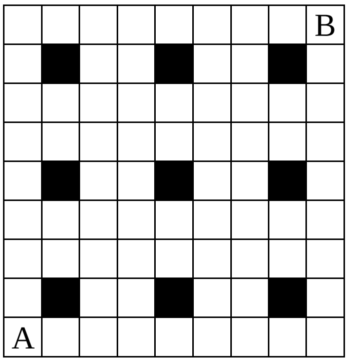
С новым, 2018, годом!

1) Вокруг стола пустили пакет с семечками. Первый взял 1 семечку, второй – 2, третий – 3 и так далее (каждый следующий брал на одну семечку больше). Известно, что на втором круге было взято в сумме на 100 семечек больше, чем на первом. Сколько человек сидело за столом?
2) На свободные поля шахматной доски по одной выставляются ладьи. Новую ладью разрешается выставить, если она бьет четное число пустых клеток. Как, действуя таким образом, занять ладьями все 64 клетки доски?
3) Найдите хотя бы одну тройку натуральных чисел x, y и z такую, что $28x+30y+31z=365$.
4) Можно ли таблицу $n\times n$ заполнить числами -1, 0 и 1 так, чтобы суммы во всех строках, во всех столбцах и на главных диагоналях были различны?
5) Какое наименьшее количество трехклеточных уголков можно разместить в квадрате 8×8 так, чтобы в этот квадрат больше нельзя было поместить ни одного такого уголка?
6) Известно, что трехзначное число КУБ является точным кубом. Докажите, что ШАР кубом не является.
7) Первый вторник месяца П.Д. провел в Смоленске, а первый вторник после первого понедельника – в Вологде. В следующем месяце П.Д. первый вторник провел во Пскове, а первый вторник после первого понедельника – во Владимире. Сможете ли вы определить, какого числа и какого месяца П.Д. был в каждом из городов?
8) Сколькими способами можно переставить буквы слова «ортогональность» так, чтобы между любыми 2 гласными буквами стояли ровно 2 согласных?
9) Сколько среди первых 1000 натуральных чисел таких, которые не делятся ни на 2, ни на 3, ни на 5?
10) Сколькими способами можно перейти из клетки A в клетку B изображенного справа квадрата, ни разу не побывав ни на одной закрашенной клетке и двигаясь только вправо или вверх?



11) Легко можно разрезать квадрат на два равных треугольника или два равных четырехугольника. А как разрезать квадрат на два равных многоугольника с произвольным количеством углов?
12) При каком наименьшем натуральном n найдутся такие натуральные x, y такие, что
$$\begin{cases}\text{НОД}(x,y)=999\\ \text{НОК}(x,y)=n!\end{cases}?$$
13) Найдите все такие четырехзначные числа $\overline{abcd}$, что $\overline{abcd}=78\times\left(\overline{ab}+\overline{bc}+\overline{cd}\right)$ (одинаковые буквы обозначают одинаковые цифры, разные буквы тоже могут обозначать одинаковые цифры).
14) Игра начинается с числа 1. За ход разрешается умножить имеющееся число на любое натуральное число от 2 до 9. Выигрывает тот, кто первым получит число, большее 1000. Кто победит при правильной игре?
15) Решите в целых числах уравнение $(x+y)(x-y)^2=2009$.

Рейтинг 3 – А вы поступили бы в ФТШ?

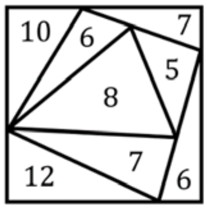
Открытая олимпиада АУ в 8 класс, 2015 год

1) Расставьте скобки и знаки арифметических действий между некоторыми цифрами (не обязательно между всеми!) в выражении 1 3 5 3 1 так, чтобы в результате получилось 2015.
2) На математическом конкурсе было предложено несколько простых и несколько сложных задач. Участнику давали 3 очка за решение сложной задачи и 2 очка за решение простой. Кроме этого, за каждую нерешенную простую задачу списывалось одно очко. Вася решил 10 задач и набрал 16 очков. Сколько было простых задач на конкурсе?
3) Сумма трех различных натуральных чисел равна 100. Из этих чисел можно составить три попарных разности (при вычислении разности из большего числа вычитают меньшее). Какое наибольшее значение может принимать сумма этих попарных разностей?
4) В треугольнике ABC точка D лежит на стороне BC, причем $AD=DC$. Сумма внешних углов треугольника ABC при вершине A равна 160°. Найдите угол C, если AD – биссектриса угла BAC.

5) Нам удалось подслушать разговор троих учеников лицея ФТШ. Антон заявил: «Я не могу не сказать в одном предложении больше одиннадцати слов». Оскар добавил: «Кстати, все предложения длиннее одиннадцати слов ложны». Валера мрачно заметил: «Мне кажется, несмотря ни на что, хотя бы один из вас сейчас лжет». Определите, сколько человек сказало правду.
6) В бассейне ФТШ живут осьминожки, у каждого из которых один или два друга. Когда пришла весна, те, у кого было двое друзей, посинели, а те, у кого был один друг – покраснели. После этого оказалось, что любые два друга – разноцветные. А когда пришло лето, 5 синих осьминожек перекрасились в красный цвет, 64 красных – в синий, а остальные сохранили окраску. Теперь любые два друга одного цвета. Сколько осьминожков живет в бассейне ФТШ?

Открытая олимпиада АУ в 8 класс, 2016 год

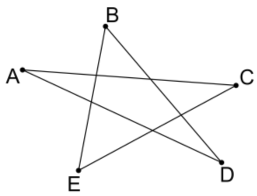
1) Сумма цифр числа x равна y, а сумма цифр числа y равна z. Может ли сумма $x+y+z$ быть равна 60?
2) В стаде, состоящем из лошадей, двугорбых и одногорбых верблюдов, в общей сложности 200 горбов. Сколько животных в стаде, если количество лошадей равно количеству двугорбых верблюдов?
3) В поезде Сан-Франциско – Чикаго ввели сплошную нумерацию мест в вагонах. Во всех вагонах одинаковое количество мест. Известно, что места 385 и 416 находятся в одном вагоне, а места 544 и 577 находятся в разных вагонах, причем эти вагоны – не соседние. Сколько мест в одном вагоне?



4) Квадрат $ABCD$ разрезали на треугольники и внутри каждого из них написали его периметр (см. рисунок). Найдите сторону квадрата $ABCD$.
5) Докажите, что
$$\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{98}-\frac{1}{99}+\frac{1}{100}>\frac{1}{5}.$$
6) Существуют ли такие три различных числа a, b и c, что $a(b-c)=b(c-a)=c(a-b)$?

Открытая олимпиада АУ в 8 класс, 2018 год

1) Можно ли в равенстве $0{,}{*}{*}+0{,}{*}{*}+0{,}{*}{*}+0{,}{*}{*}=1$ заменить звездочки различными цифрами от 0 до 7 так, чтобы получилось верное равенство?
2) В комнате 18 человек – рыцари и лжецы. Лжецы всегда лгут, а рыцари всегда говорят правду. Семь человек сказали: «В комнате нечетное число лжецов», а остальные 11 сказали: «В комнате четное число рыцарей». Сколько рыцарей могло быть в комнате?



3) В пятиугольной звезде, изображенной на рисунке, $\angle ACE=\angle ADB$ и $\angle DBE=\angle BEC$. Известно также, что $BD=CE$. Докажите, что $\angle ACD=$ $=\angle ADC$.
4) На столе стоят гирьки двух весов: тяжелые и легкие. Все тяжелые гирьки весят одинаково и все легкие гирьки весят одинаково. Некоторые гирьки расставили по двум чашкам чашечных весов так, что весы оказались в равновесии. Если переставить две легкие гирьки с левой чашки на правую, то для того, чтобы сохранилось равновесие, придется поставить на левую чашку со стола одну тяжелую гирьку. Сколько легких гирек пришлось бы поставить со стола на левую чашку, если бы первоначально с нее на правую чашку переставили одну тяжелую гирьку?
5) Назовем натуральное число замечательным, если оно самое маленькое среди натуральных чисел с такой же, как у него, суммой цифр. Чему равна сумма всех трехзначных замечательных чисел?
6) Сравните x и z, если известно, что $x+yzt=y+ztx=z+txy=t+xyz$ и $x>y$, а $z>t$.

Рейтинг 3, продолжение – принцип Дирихле

ДЗ №1

1) В лесу растет миллион елок. Известно, что на каждой елке не более 999999 иголок. Верно ли, что в лесу есть елки с равным количеством иголок?
2) В классе учится 30 человек. Правда ли, что обязательно среди них есть трое учеников, которые родились в одном месяце?
3) Дано 12 целых чисел. Докажите, что среди них найдутся 2, разность которых делится на 11.

4) Докажите, что среди любых 7 натуральных чисел можно выбрать 3, сумма которых делится на 3.

5) А) Каждую клетку таблицы 3×9 покрасили черным или белым цветом. Докажите, что в любом случае можно найти прямоугольник, все угловые клетки которого одного цвета.

Б) Всегда ли можно найти такой прямоугольник в таблице 3×7?

Классная работа №1

1) В ковре размером 4×4 метра моль проела 15 дырок. Всегда ли можно вырезать коврик размером 1×1, не содержащий внутри дырок? Дырки считайте точечными.

2) На клетчатой плоскости отмечено пять точек. Докажите, что среди найдутся две такие, что отрезок, их соединяющий, можно разделить пополам (то есть, середина этого отрезка попадает в узел решетки).

3) Несколько футбольных команд проводят турнир в один круг. Докажите, что в любой момент найдутся две команды, сыгравшие к этому моменту одинаковое число матчей.

4) Среди 40 кувшинов, с которыми атаман разбойников приехал в гости к Али-Бабе, нашлись два кувшина разной формы и два кувшина разного цвета. Докажите, что среди них найдутся два кувшина одновременно и разной формы, и разного цвета.

5) А) Какое наибольшее число полей на доске 8×8 можно закрасить в черный цвет так, чтобы в любом уголке из трех полей было по крайней мере одно незакрашенное поле?

Б) какое наименьшее число полей на доске 8×8 надо закрасить в черный цвет так, чтобы в каждом трехклеточном уголке было по крайней мере одно закрашенное поле?

6) Дано 8 различных натуральных чисел, не больших 15. Докажите, что среди их положительных попарных разностей есть три одинаковых.

7) Из листа клетчатой бумаги размером 29×29 клеток вырезали 99 квадратиков, каждый из которых состоит из 4 клеток. Докажите, что можно вырезать еще один такой же квадратик.

8) Клетки квадратной таблицы 15×15 раскрашены в красный, синий и зеленый цвета. Докажите, что найдутся по крайней мере 2 строки, в которых клеток хотя бы одного цвета поровну.

9) На далекой планете суша занимает больше половины площади планеты. Докажите, что на этой планете можно прорыть прямой тоннель, проходящий через центр и соединяющий сушу с сушей.

10) В бригаде 7 человек, суммарный возраст которых – 332 года. Докажите, что найдутся трое из них, суммарный возраст которых не менее 142 лет.

Самостоятельная работа

1) 10 школьников на олимпиаде решили 35 задач, причем известно, что среди них есть школьники, решившие ровно одну задачу, школьники, решившие ровно две задачи и школьники, решившие ровно три задачи. Докажите, что есть школьник, решивший не менее пяти задач.

2) Если класс из 30 человек рассадить в зале кинотеатра, то в любом случае хотя бы в одном ряду окажется не менее двух одноклассников. Если то же самое проделать с классом из 26 человек, то по крайней мере три ряда окажутся пустыми. Сколько рядов в зале?

3) На складе имеется по 200 сапог 41, 42 и 43 размеров, причем среди этих 600 сапог 300 левых и 300 правых. Докажите, что из них можно составить не менее 100 годных пар обуви.

4) Даны 1002 различных числа, не превосходящих 2000.

А) Докажите, что из них можно выбрать три таких числа, что сумма двух из них равна третьему.

Б) Останется ли это утверждение справедливым, если число 1002 заменить на 1001?

5) Докажите, что если a, b, c – нечетные числа, то хотя бы одно из чисел $ab-1$, $bc-1$, $ca-1$ делится на 4.

Домашняя работа №2

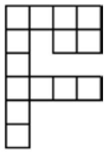
0) Как-то раз Таня ехала в поезде. Чтобы не скучать, она стала зашифровывать названия разных городов, заменяя буквы их порядковыми номерами в алфавите. Когда Таня за шифровала пункты прибытия и отправления поезда, то с удивлением обнаружила, что они записываются с помощью всего лишь двух цифр: $21221 - 211221$. Откуда и куда шел поезд?

1) В волейбольном турнире команды играют друг с другом по одному матчу. За победу дается одно очко, за поражение – ноль. Известно, что в один из моментов турнира все команды имели разное количество очков. Сколько очков набрала в конце турнира предпоследняя команда, и как она сыграла с победителем?

2) В каждой клетке доски размером 5×5 стоит крестик или нолик, причем никакие три крестика не стоят подряд ни по горизонтали, ни по вертикали, ни по диагонали. Какое наибольшее количество крестиков может быть на доске?

Рейтинг 3, окончание – Квазигеометрия

Единственное ДЗ



0) Какое наибольшее число непересекающихся букв F (см. рисунок) можно вырезать из квадрата 300×300? Фигурки можно поворачивать и переворачивать.

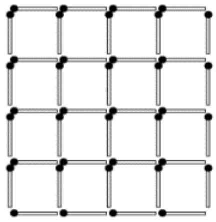
1) Как разрезать квадрат 5×5 на 7 различных прямоугольников? Прямоугольники, получающиеся поворотом, считаются одинаковыми.

2) Пошел Иван-царевич искать похищенную Кощеем Василису Прекрасную. Навстречу ему Леший.

— Знаю, – говорит, – я дорогу в Кощеево Царство, случалось, ходил туда. Шел я четыре дня и четыре ночи. За первые сутки я прошел треть пути – прямой дорогой на север. Потом повернул на запад, сутки продирался лесом и прошел вдвое меньше. Третьи сутки я шел лесом, уже на юг, и вышел на прямую дорогу, ведущую на восток. Прошагал я по ней за сутки 100 верст и попал в Кощеево царство. Ты ходок такой же резвый, как и я. Иди, Иван-царевич, глядишь, на пятый день будешь в гостях у Кощея.

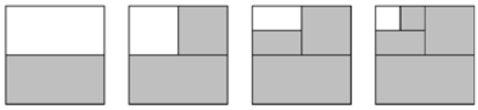
— Нет, – отвечал Иван-царевич, – если все так, как ты говоришь, то уже завтра я увижу мою Василису Прекрасную.

Прав ли он? Сколько верст прошел Леший и сколько думает пройти Иван-царевич?



3) Из 40 спичек образована квадратная решетка. Покажите, как снять 9 спичек, чтобы полностью не сохранилось контура ни одного квадрата (состоящего из одного или большего количества маленьких квадратиков).

4) Замок имеет вид прямоугольника размером 7×9 клеток. Каждая клетка, кроме центральной – комната замка, а в центральной клетке находится бассейн. В каждой стене (стороне клетки), разделяющей две соседние комнаты, проделана дверь. Можно ли, не выходя из замка и не заходя в бассейн, обойти все комнаты, побывав в каждой ровно по одному разу?



5) Квадрат со стороной 1 м закрашивают по частям так, как показано на рисунке справа. Чему будет равна закрашенная площадь после 100-го шага?