

Рейтинг 5 – Системы счисления

ДЗ №1

В мире существует 10 типов людей: те, кто понимает двоичную систему счисления, и те, кто ее не понимает.

- 1) Переведите в десятичную систему счисления:
А) 111_2 ; Б) 220_3 ; В) 3210_4 ; Г) 2016_8 ; Д) 365_{16} ; Е) MMCMLXXIX.
- 10) В какой системе счисления справедливо равенство $3 \cdot 4 = 10$?
- 11) В системе счисления с некоторым основанием десятичное число 18 записывается в виде 30. Укажите это основание.
- 100) В саду растет 35 фруктовых деревьев, из них: 16 – яблони, 14 – груши и 2 – вишни. Найдите основание системы счисления, в которой посчитаны деревья.
- 101) Как разложить по 7 кошелькам 127 рублевых монет так, чтобы любую сумму от 1 до 127 рублей можно было бы выдать, не открывая кошельков?

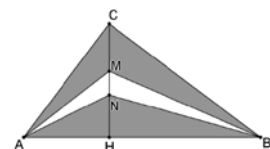
ДЗ №2

- 1) Решите следующие примеры (ответ запишите римскими цифрами):
А) XXIX + LXII; Б) XCIII – XLIV; В) DCLIII – CDXLIV; Г) CXСII/XII; Д) VI · IX.
- 2) Решите ребус в двоичной системе счисления:
А) * + ** = ***; Б) ** + ** = * 1 *.
- 3) Дано: $a = CF_{16}$, $b = 321_8$. Найдите такое двоичное число x , что $a < x < b$.
- 4) Существует ли система счисления, в которой одновременно
А) $3 + 4 = 10$ и $3 \cdot 4 = 15$; Б) $2 + 3 = 5$ и $2 \cdot 3 = 11$?
- 5) Решите уравнение: $101_x + 13_{10} = 101_{x+1}$.
- 6) Вычислите, не переводя в десятичную систему:
А) $2012_3 + 1211_3$; Б) $432_5 + 114_5$.
- 7*) Сформулируйте и докажите признак делимости на 4 в пятеричной системе счисления.

Рейтинг 5, продолжение – А вы бы поступили в ФТШ в третий раз?

Вступительная олимпиада. МХ, 2018 год

- 1) В прямоугольном треугольнике ABC катеты AC и BC равны 6 и 8. На высоте CH выбраны точки M и N так, что площадь заштрихованной части равна 19. Найдите MN .
- 2) В волшебных шахматах все фигуры умеют говорить, причем белые фигуры всегда врут, а черные – всегда говорят правду. На каждой клетке доски 4×4 стоит по фигуре, причем среди них есть и белые, и черные. Каждая фигура по очереди говорит: «Среди моих соседей поровну белых и черных фигур». Сколько среди них белых фигур, если соседними называются клетки, имеющие общую сторону?
- 3) Винни-Пух и Пятачок сели за стол немного подкрепиться и начали одновременно есть мед из одного горшка, не отвлекаясь на разговоры. Если бы Винни-Пух ел со скоростью Пятачка, то процесс еды длился бы на 4 минуты дольше, а если бы, наоборот, Пятачок ел со скоростью Винни-Пуха – то сократился бы на 1 минуту. За какое время мед из горшка был полностью съеден?
- 4) Из города A в город B , расстояние между которыми равно 100 км, в 9:00 вышли два автобуса, причем скорость одного из них в $1\frac{5}{7}$ раза больше скорости другого. В то же время из города B в город A выехал велосипедист. Первый автобус он встретил в 10:20, а второй – в 11:00. Найдите скорость велосипедиста.
- 5) При каком наибольшем значении p корни уравнения $x^2 - px - 87 = 0$ являются целыми числами?



Рейтинг 5, окончание – И снова системы счисления

Последнее ДЗ №3

Предисловие

Поскольку стандартного обозначения для сбалансированных СС не существует, давайте введем свое:

- будем ставить черту над основанием системы счисления, если используется сбалансированный алфавит;

- с помощью такой же черты будем обозначать отрицательные разряды. То есть, запись $\bar{1}20\bar{2}_5$ означает четырехзначное число $(-1)(2)(0)(-2)$ в сбалансированной пятеричной СС.

Для себя

Задания из этого раздела вы делаете для себя, чтобы упростить решение задач следующего раздела.

- 1) Переведите пример из введения в десятичную СС и в несбалансированную пятеричную СС.
- 2) Вспомните/сделайте таблицы сложения и умножения для СС с основаниями 2, 3, $\bar{3}$, 5, $\bar{5}$, 6, 16.
- 3) Сделайте таблицы прямого перевода из
 - А) двоичной в четверичную, восьмеричную и шестнадцатеричную;
 - Б) троичной в девятеричную.

Для рейтинга

Задания из этого раздела вы сдаете на проверку.

- 1) Вычислите в столбик (не переводя в десятичную):
 - А) $A391_{16} + 8534_{16}$; Б) $34261_8 - 4435_8$; В) $21043_5 + 10432_5$; Г) $\bar{1}101_{\bar{3}} + \bar{1}10_{\bar{3}}$;
 - Д) $101_2 \times 111_2$; Е) $210_3 \times 12_3$; Ж) $502_6 \div 21_6$; З) $10\bar{2}_{\bar{5}} \times \bar{2}2_{\bar{5}}$.
- 2) ПД написал на доске трехзначное шестнадцатеричное число X и умножил его на два. Оказалось, что получившееся число Y тоже трехзначное и, более того, суммы цифр обоих чисел равны. Приведите пример таких чисел X и Y .
- 3*) Назовем основание системы счисления комфортным, если существует простое число, запись которого в этой системе счисления ровно по одному разу содержит каждую из ее цифр. Например, 3 – комфортное основание, так как троичное число 102 – простое. Найдите все комфортные основания, не превосходящие 10.

СС.СР

- 1) К записи натурального числа в восьмеричной СС справа приписали два нуля. Во сколько раз увеличилось число в десятичной СС?
- 2) Решите уравнение: $161_x = 134_{x+1}$.
- 3) Запись числа 69_{10} в СС с основанием N оканчивается на 1 и содержит 4 цифры. Чему равно N ?
- 4) Один человек имел 100 монет. Он поровну разделил их между двумя своими детьми. Каждому досталось по 11 монет и одна осталась лишней. Какая СС использовалась, и сколько было монет?
- 5) Чему равно наименьшее основание x , при котором $225_x = 405_y$?
- 6) Значение арифметического выражения $9^8 + 3^5 - 9$ записали в троичной СС. Сколько раз встретилась цифра 2?

МатБой

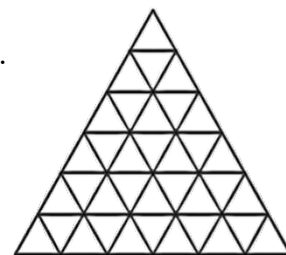
- 1) У даты 12.04.1961 (то есть 12 апреля 1961 года) сумма цифр равна 24. Найдите ближайшую дату после 23.04.2018, у которой сумма цифр равна 35.
- 2) О двузначном числе n высказаны следующие утверждения:
 - А) n делится на 3;
 - Б) n делится на 5;
 - В) n делится на 9;
 - Г) n делится на 15;
 - Д) n делится на 25;
 - Е) n делится на 45.
 Найдите хотя бы одно такое n , что ровно половин из этих утверждений истинны.
- 3) Саня дружит с Алексеем, Верой, Глебом, Дашей и Евгением. У него День Рождения. Если пригласить Алексея, то тогда надо пригласить и Веру. Обязательно нужно пригласить либо Глеба, либо Веру, но приглашать их вместе не стоит. Также нужно пригласить либо Дашу, либо Евгения, либо обоих вместе. Дашу можно приглашать либо вместе с Глебом, либо никого из них. А если пригласить Евгения, то тогда необходимо пригласить Алексея и Дашу. Кого же все-таки надо пригласить?
- 4) Мальчик вырезал из бумаги десять карточек и на каждой написал по одной цифре 0, 1, 2, 3, ..., 9. Затем он разложил их на столе по две и обнаружил, что получившиеся двузначные числа относятся как 1 : 2 : 3 : 4 : 5. Покажите, как он раскладывал карточки.
- 5) Разрежьте квадрат на 1000 равных пятиугольников.
- 6) Сколькими способами можно выбрать черную и белую клетки шахматной доски 8×8 , не имеющие общей стороны?

А вот теперь настоящий МатБой!

- 1) Какое наибольшее количество треугольников можно отметить так, чтобы никакие два отмеченных треугольника не имели общих точек?
- 2) Буквами A , B , C и D обозначены числа 1, 2, 3 и 4 (в неизвестном порядке). Известно, что:

- Если A не 1, то C не 2.
- Если B обозначает 2 или 3, то A равно 1.
- Если $D = 2$, то B не 1.
- Если C не 4, то B равно 3.
- Если D не 1, то B – это 1.

Какие буквы каким числам соответствуют?

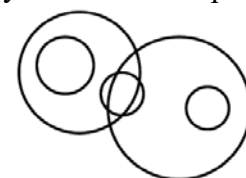


- 3) В артели «Эффективный менеджмент» работает 56 человек, каждый из которых либо умен, либо трудолюбив, либо начальник (а возможно, обладает сразу несколькими из этих качеств). Умных людей в артели 22, из них 9 – начальники. Трудолюбивых – 25, среди них – 10 начальников, а из этих десяти двое еще и умны. Шесть человек – и умны, и трудолюбивы. Сколько в артели начальников?
- 4) Найдите хотя бы одно решение ребуса ЧЕТЫРЕ + ЧЕТЫРЕ = ВОСЕМЬ (одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным – разные).
- 5) Разрежьте прямоугольник 8×4 на 4 равные фигуры, не являющихся прямоугольниками, так, чтобы из них нельзя было вырезать квадрат 2×2 .
- 6) Сумма четырехзначного натурального числа с его суммой цифр равна 2018. Чему равно само число (найдите все возможные варианты)?

Рейтинг 5, послесловие – Формула включений/исключений

Единственное ДЗ

- 1) ПД провел социальный опрос и выяснил про учеников одной из своих групп, что 25 из них играют в шахматы, 30 были в математическом лагере, 28 становились победителями различных олимпиад; среди призеров олимпиад 18 играют в шахматы и 17 были в математическом лагере; 16 учеников играют в шахматы и были в математическом лагере, притом среди них 15 еще и побеждали в олимпиадах. Также ПД утверждает, что всего в этой группе 45 учеников. Не прикиривает ли ваш учитель?
- 2) В одном классе все любят бегать, прыгать и плавать. 60% детей любят бегать, 60% детей любят прыгать, 40% детей любят плавать. Сколько процентов учеников любят все три занятия?
- 3) Лесник считал сосны в лесу. Он обошел 5 кругов, изображенных на рисунке, и внутри каждого круга насчитал ровно 3 сосны. Может ли быть, что лесник ни разу не ошибся?
- 4) В детский сад завезли карточки для обучения чтению: на некоторых написано «МА», на остальных – «НЯ». Каждый ребенок взял три карточки и стал составлять из них слова. Оказалось, что слово «МАМА» могут сложить из своих карточек 20 детей, слово «НЯНЯ» – 30 детей, а слово «МАНЯ» – 40 детей. У скольких ребят все три карточки одинаковы?
- 5) Саша зачеркнул на 25-й странице учебника все слова, в которых нет буквы «А», потом он зачеркнул все слова, в которых нет буквы «Б», а потом он нашел все слова, где есть и буква «О», и буква «А», и тоже зачеркнул их. Костя на той же странице своего учебника зачеркнул слова, где нет «Б», но есть «А» или «О» (возможно, обе сразу), и после этого он зачеркнул все слова, где нет ни буквы «А», ни буквы «О». Могло ли у Саши остаться незачеркнутыми больше слов, чем у Кости?



Рейтинг 6 – Теория вероятности

С какой вероятностью вы решите это ДЗ целиком правильно?

- 1) В корзине 9 красных шаров и 3 синих. Шары различаются только цветом. Наугад достаем один из них. Какова вероятность того, что выбранный таким образом шар окажется синего цвета?
- 2) Конференция длится три дня. В первый и второй день выступают по 15 докладчиков, в третий день – 20. Какова вероятность того, что доклад ТА выпадет на третий день, если порядок докладов определяется жеребьевкой?

- 3) В урне 10 красных, 5 синих и 15 белых шаров.
 - А) Чему равна вероятность появления цветного шара?
 - Б) Чему равна вероятность вытащить сперва цветной, а затем белый шар?
 - В) А два одинаковых шара?
- 4) Имеется три ящика, в каждом из которых лежат шары с номерами от 0 до 9. Из каждого ящика вынимается по одному шару. Какова вероятность того, что
 - А) вынуты три единицы;
 - Б) вынуты три равных числа?
- 5) Вероятность того, что батарейка бракованная, равна 0,06. Покупатель в магазине выбирает случайную упаковку, в которой две таких батарейки. Найдите вероятность того, что обе батарейки окажутся исправными.

Задачи на вычисление вероятности по определению

- 2) В мешке лежат 33 жетона, помеченные буквами русского алфавита. Из него извлекают 6 жетонов и располагают их в порядке извлечения. Какова вероятность получить слово «Москва», если:
 - А) жетоны после извлечения возвращаются обратно;
 - Б) жетоны после извлечения обратно не возвращаются?
- 3) В мешке лежат 5 жетонов, помеченные буквами «а», «б», «в», «г», «д». Из него 4 раза извлекают жетон, который после записи его буквы возвращается обратно. Какова вероятность того, что в полученной записи ни одна буква не повторится дважды?
- 4) В мешке лежат 33 жетона, помеченные буквами русского алфавита. Из него извлекают 4 жетона и располагают их в алфавитном порядке. Какова вероятность того, что при этом получится слово «винт»?
- 5) В мешке лежат 33 жетона, помеченные буквами русского алфавита. Из него извлекают 4 жетона, причем каждый жетон после извлечения и записи изображенной на нем буквы возвращается в мешок. Какова вероятность того, что из полученных таким путем букв можно будет сложить
 - А) слово «март»;
 - Б) слово «мама»?
- 6) Куб, все грани которого окрашены, распилен на тысячу равных кубиков. Какова вероятность того, что наудачу взятый кубик имеет две окрашенные грани?
- 7) Слово «молния» разрезали на буквы и выложили наудачу 4 из них в ряд. Какова вероятность того, что при этом получится слово «миля»?
- 8) В ящике лежат 20 одинаковых на ощупь шаров: 12 белых и 8 черных. Из ящика вынули наудачу 8 шаров. Какова вероятность того, что
 - А) ровно три из них черные;
 - Б) черных шаров вынули не более трех?
- 9) На карточках написаны цифры от 1 до 9. Наугад берут 4 карточки и выкладывают их в ряд. Какова вероятность того, что получится число
 - А) четное;
 - Б) 1234?
- 10) Из n лотерейных билетов один выигрышный. Какова вероятность того, что среди k наудачу выбранных билетов есть выигрышный?
- 11) Из колоды карт (их 36) наугад вынимают 5 карт. Какова вероятность того, что будут вытащены 2 туза и три шестерки?
- 12) На пяти карточках разрезной азбуки изображены буквы «е», «е», «л», «п», «п». Случайным образом их выкладывают в ряд. Какова вероятность того, что получится слово «пепел»?
- 13) В барабане револьвера 7 гнезд, из них в пяти заложены патроны. Барабан приводится во вращение, потом нажимается спусковой курок. Какова вероятность того, что, повторив такой опыт два раза подряд:
 - А) оба раза не выстрелит;
 - Б) оба раза револьвер выстрелит?
- 14) Из колоды карт (их 36) наугад вынимают две карты. Какова вероятность того, что среди них находится хотя бы одна дама?
- 15) В почтовом отделении имеются открытки 6 видов. Какова вероятность того, что среди 4 проданных открыток
 - А) все открытки различны;
 - Б) все открытки одинаковы?