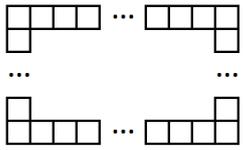


## Олимпиадная выжимка

- 1) Рыцарский турнир длится ровно 7 дней. К концу четвертого дня сэр Ланселот не успел сразиться лишь с одной четвертью от общего числа участников турнира. А сэр Тристан к этому времени сразился ровно с одной седьмой из тех рыцарей, с кем успел сразиться сэр Ланселот. Какое минимальное количество рыцарей могло участвовать в турнире?
- 2) Из 1812 одинаковых квадратов со стороной 1 мм сделали прямоугольную рамку для групповой фотографии (см. рисунок, границы фотографии совпадают с внутренними границами рамки). Потом фотографию разрезали по линии миллиметровой сетки на две прямоугольные части. Теперь понадобилось две рамки, на которые ушло 2018 таких же квадратов. Найдите размеры исходной фотографии.
 


- 3) Записаны четыре различных натуральных числа. Оказалось, что сумма чисел, им обратных, равна 1. Может ли среди записанных чисел отсутствовать число 2?
- 4) В прямоугольнике  $ABCD$  сторона  $AB$  равна 6, сторона  $BC$  равна 11. Проведены биссектрисы углов  $B$  и  $C$ , пересекающие сторону  $AD$  в точках  $X$  и  $Y$  соответственно. Найдите длину отрезка  $XU$ .
- 5) Игорь сложил десять подряд идущих натуральных чисел, затем разделил полученную сумму на сумму следующих десяти натуральных чисел. Могло ли у него получиться число 0,8?
- 6) Назовем натуральное число интересным, если его можно разложить на натуральные множители, каждый из которых меньше, чем 30. Докажите, что из 10000 интересных чисел всегда можно выбрать два, произведение которых является точным квадратом.
- 7) 33 богатыря выходят в дозор 33 дня. В первый день должен выйти один богатырь, во второй – два, в третий – три и так далее, в последний день – все богатыри. Сможет ли дядька Черномор организовать дозоры так, чтобы все богатыри вышли в дозор одинаковое количество раз?
- 8) Выписаны все делители некоторого натурального числа, кроме единицы и его самого. Какие-то два числа из этого списка отличаются в шесть раз. Найдите отношение двух самых больших чисел из этого списка.
- 9) В вершинах семнадцатиугольника записали различные целые числа (по одному в каждой вершине). Затем все числа одновременно заменили на новые: каждое заменили на разность двух следующих за ним по часовой стрелке чисел (из соседнего вычитали следующее за ним). Могло ли произведение полученных чисел оказаться нечетным?
- 10) В правильной шестиугольной пирамиде  $SAB CDEF$  ( $ABCDEF$  – основание) боковое ребро равно  $a$ , плоский угол при вершине  $S$  равен  $10^\circ$ . Муравей ползет по поверхности пирамиды из вершины  $A$ , стремится побывать на всех боковых ребрах (возможно, в вершинах) и вернуться в точку  $A$ . Какова длина его кратчайшего пути?

## Рейтинг 1 – Алгебра

### Вводное ДЗ №1

- 1) Числитель и знаменатель дроби – положительные числа. Числитель увеличили на 1, а знаменатель на 10. Могла ли дробь увеличиться?
- 2) Слабо разложить на множители выражение  $x^2 - 5x + 6$ ?
- 3) Сократите дроби:

А)  $\frac{3x^2 - 7x + 2}{2 - 6x}$ ;

Б)  $\frac{16a^2 - 8a + 1}{1 - 4a + x - 4ax}$ ;

В)  $\frac{8 \cdot 100^n}{2^{2n+1} \cdot 5^{2n-2}}$ .

- 4) Упростите выражение:

$$\left( \frac{2m}{2m+n} - \frac{4m^2}{4m^2 + 4mn + n^2} \right) : \left( \frac{2m}{4m^2 - n^2} + (n - 2m)^{-1} \right).$$

### ДЗ №2

**(в котором есть место и алгебраическим дробям, и ...квадратным корням)**

- 1) Сократите дробь:

А)  $\frac{a^4 + 4}{a^3 - 2a^2 + 2a}$ ;

Б)  $\frac{x^{14} + x^{13} + x^{12} + \dots + x^2 + x + 1}{x^4 + x^3 + x^2 + x + 1}$ .

- 2) Пусть  $x/y = 4$ . Найдите значение выражения:

$$\frac{x^2 + xy - y^2}{x^2 - xy + y^2}$$

- 3) Упростите выражение:

А)  $\frac{a-4}{a^3-a} : \left( \frac{a-1}{2a^2+3a+1} - \frac{1}{a^2-1} \right)$ ;

Б)  $\left( \frac{a+1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{a-\sqrt{a}} - \frac{a}{\sqrt{a}+1} \right) \cdot \frac{1-a}{1+a}$ .

### Текстовые задачи

*Логика.* Во дворе живут четыре пса: Прошка, Брошка, Крошка и Антошка. Каждому из них случилось драться с кем-нибудь из остальных, причем у Прошки, Брошки и Крошки число тех, с кем они дрались – разное. Со сколькими собаками двора дрался Антошка?

*Алгебры чуть-чуть.* Члены старшей группы детсада «Трудолюбивые кротята» два дня копали в песочницах ямки. Каждый из них выкопал столько ямок, сколько все остальные в сумме – во второй день. Правда ли, что все «Трудолюбивые кротята» за два дня выкопали поровну ямок?

*Действуй! С пояснениями!* Петя вскапывает грядку один на 4 минуты дольше, чем он это делает вместе с Васей. Вася вскапывает ту же грядку на 9 минут дольше, чем он это сделал бы вместе с Петей. За сколько минут вскапывают ту же грядку Вася и Петя вместе?

*Пофантазируй.* Изобразите на плоскости 6 точек так, чтобы они служили вершинами ровно 17 треугольников.

*Не бойся больших чисел!* Найдите последнюю цифру в десятичной записи числа  $1! + 2! + \dots + 2018!$

### ДЗ №3

- 1) Разложите на множители:

А)  $16a^3 + 8a^2b + b^2a$ ;

Б)  $16a^3 + 48a^2b + 48ab^2 + 16b^3$ .

- 2) Сократите дроби:

А)  $\frac{2x-3x^2}{3x^2+7x-6}$ ;

Б)  $\frac{b^2-a^2}{a^2b+2b-ab^2-2a}$ ;

В)  $\frac{5^{n+1}-5^{n-1}}{2 \cdot 5^n}$ .

- 3) Упростите выражения:

А)  $\left( \frac{2}{c-2} + \frac{3c-21}{c^2+c-6} + \frac{2c}{c+3} \right) \cdot \frac{c}{2c-5}$ ;

Б)  $\frac{3c-6}{c+2} - \frac{c}{(c+2)^2} : \frac{c}{c^2-4} - \frac{4c}{c+2}$ .

### ДЗ №4, в котором опять есть место квадратным корням... Смотри в корень!

- 1) *Конструируй!* Лилипуты и минипуты живут на земле, имеющей форму прямоугольника, и вечно враждуют из-за своих границ. Как проложить границу внутри прямоугольника так, чтобы она делила прямоугольник на 2 равных (во избежание войны!) семиугольника?
- 2) *Сумма углов в треугольнике!* В  $\triangle ABC$  проведены биссектрисы  $AP$  и  $CN$ , которые пересекаются в точке  $H$ . Найдите  $\angle ANC$ , если  $\angle ABC = 80^\circ$  и  $\angle BAC = 30^\circ$ .
- 3) *Не бойся больших чисел и наблюдай!* Какая цифра в ряду чисел 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 ... 2018 стоит на 2018-ом месте?
- 4) *Рассматривай четность!* У Пети есть числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Он сделал с ними следующие действия: а) выбрал четыре числа; б) прибавил к каждому выбранному числу по 1; в) перемножил полученные результаты; г) отнял единицу от полученного произведения; д) поделил результат на 16 и получил в итоге натуральное число. Какие числа мог получить Петя, если он не допускал арифметических ошибок?
- 5) *Система уравнений – хорошая модель!* Одна тетрадь, 3 блокнота и 2 ручки стоят 98 рублей, а три тетради и блокнот – на 36 рублей дешевле 5 ручек. Сколько стоит каждый из предметов, если тетрадь стоит четное число рублей? (Каждый из предметов стоит целое число рублей.)
- 6) *Хитрые квадратные корни...* Существует ли такое  $x$ , что  $\sqrt{x+9} + \sqrt{x} + \sqrt{x-9} = 7$ ?

### ДЗ №5

- 1) Дана дробь  $1/999$ . Требуется уменьшить ее знаменатель и увеличить числитель на одно и то же число  $M$  так, чтобы получившаяся дробь равнялась  $2/3$ . Найдите  $M$ .
- 2) Вместо знаков \* вставьте такие числа, чтобы равенство  $(x^2 + * \cdot x + 2) \cdot (x + 3) = (x + *) \cdot (x^2 + * \cdot x + 6)$  стало тождеством.

3) Сколько единиц в записи числа

$$\left(\frac{333 \dots 333}{100 \text{ троек}}\right)^2 + \frac{222 \dots 222}{100 \text{ двоек}} ?$$

4) Решите неравенство:  $(3 - \sqrt{10})(x - 3) > 0$ .

5) Сравните:

А)  $400^5 - 399^2(400^3 + 2 \times 400^2 + 3 \times 400 + 4)$  и 2000.

Б)  $(2 + \sqrt{5})^2 + \sqrt{(4\sqrt{5} - 11)^2}$  и  $\sqrt{396}$ .

6) Сократите дробь:

$$\frac{x^4 - 6x^2\sqrt{2} + 18}{x^4 - 18}$$