

Рейтинг 2, предисловие

Санкт-Петербургская городская олимпиада школьников по математике
7 класс, районный этап, 2017 год

- 1) Справа изображена таблица, заполненная «змейкой»: в первой строке слева направо выписаны по возрастанию числа, начиная с 1, потом этот ряд чисел продолжается во второй строке справа налево, потом в третьей строке – снова слева направо и т.д. У Нади есть более крупная таблица, тоже заполненная змейкой, начиная с числа 1. В ней нашелся следующий фрагмент 2×2 :

15	14
38	39

1	2	3
6	5	4
7	8	9
12	11	10

Сколько столбцов в Надиной таблице? Приведите все возможные варианты ответа и докажете, что других нет.

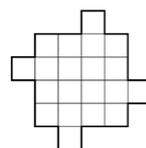
- 2) На доске написано 5 четных чисел. Среди последних и предпоследних цифр этих чисел нет одинаковых. Докажите, что сумма этих пяти чисел не может являться точным квадратом.
- 3) В океане расположено три острова A , B и C , причем расстояния от A до B и от A до C – по 60 км, а от B до C – 80 км. Одновременно из B в C отправилась яхта, а из C в A – катер, оба со скоростью 20 км/ч. Через час яхта села на мель и стала подавать сигнал бедствия. Катер тут же изменил курс, увеличил скорость вдвое и последовал к яхте. С острова A к яхте отправилась спасательная лодка со скоростью 40 км/ч. Докажите, что лодка и катер доберутся до яхты одновременно.
- 4) В Стране Чудес вдоль дороги растут 12 кустов розы, на каждом кусте по 6 шипов. Проходим разрешено срывать с каждого куста 1, 2 или 3 шипа, но при этом никто не должен срывать поровну шипов с соседних кустов, иначе стражники арестуют нарушителя. Алиса, потом Болванщик и после них Валет Червей прошли вдоль дороги и сорвали все шипы. Болванщик сорвал меньше 19 шипов. Докажите, что один из двух других сорвал не менее 30 шипов.

Мааленькое ДЗ на большие каникулы*

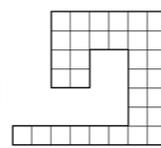
- 1) Докажите, что число $\frac{1 \dots 1}{100} \frac{5 \dots 5}{99} 6$ – точный квадрат.
- 2) В треугольнике две медианы перпендикулярны и равны 3 и 4. Найдите площадь треугольника.
- 3) Ладья-бадья стоит в начале полоски 1×15 и за один ход ходит вправо на любое количество клеток. Сколько способов у нее добраться до последней клетки?
- 4) Кузнечик совершает прыжок длины 1, поворачивает на 90° , совершает прыжок длины 2, поворачивает на 90° , совершает прыжок длины 3, и т.д. Может ли он после 1982 прыжков оказаться в исходной точке?
- 5) На острове Невезения мужчины по средам всегда говорят правду, а по четвергам всегда лгут, а женщины – наоборот. В среду каждый из них сказал: «У меня знакомых мужчин на 1 больше, чем знакомых женщин», а в четверг – «Среди незнакомых мне жителей деревни мужчин на 1 больше, чем женщин». Могло ли на острове быть ровно 2017 жителей?
- 6) В 6-а классе провели контрольную работу по алгебре. Оказалось, что средняя оценка у мальчиков – 4; у девочек – 3,25; у всех вместе – 3,6. Сколько мальчиков и сколько девочек писало контрольную работу, если в классе больше 30 и меньше 50 человек? *благодарите ТА за это ;)

Задачи «Математической настолки»

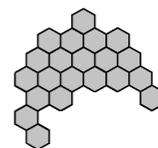
- 1) Разрежьте фигуру 1 на четыре равные части.
- 2) Разрежьте фигуру 2 на две равные части.
- 3) Разрежьте фигуру 3 на три равные части.
- 4) На двух полках 25 книг. На одной из них на 3 книги больше, чем на другой. Сколько книг на каждой полке?
- 5) 6 косцов выпили бочонок кваса за 8 часов. Сколько косцов за 3 часа выпьют такой же бочонок?
- 6) Над озерами летели гуси. На каждом садилась половина гусей и еще полгуся, остальные летели дальше. Все сели на 7 озерах. Сколько было гусей?
- 7) Один человек купил 112 баранов старых и молодых, заплатив за них 49 рублей и 20 алтын. За каждого старого барана он платил 15 алтын и 4 полушки, а за молодого – 10 алтын. Сколько каких баранов было куплено? (В одном алтыне 3 копейки, а в одной копейке – 4 полушки.)



Фигура 1



Фигура 2



Фигура 3

- 8) Напишите следующее число последовательности: 1, 2, 4, 7, 11, 16, 22, 29, ?
- 9) Напишите следующее число последовательности: 1, 1, 1, 3, 5, 9, 17, 31, ?
- 10) Напишите следующее число последовательности: 2, 16, 54, 128, 250, 432, ?
- 11) Алик, Боря и Вася собирали грибы. Боря собрал грибов на 20% больше, чем Алик, но на 20% меньше, чем Вася. На сколько процентов больше Алика собрал грибов Вася?
- 12) В 5 классе хватает двоечников, но Вовочка учится хуже всех. Педсовет решил, что, либо Вовочка должен к концу четверти исправить двойки, либо его исключат. Если Вовочка исправит двойки, то в классе будет 24% двоечников, а если его выгонят, то двоечников станет 25%. Какой процент двоечников в этом классе сейчас?
- 13) Через терминал оплаты на мобильный телефон можно перевести деньги, при этом взимается комиссия – натуральное число процентов. Федя положил целое количество рублей на мобильный телефон, и его счет пополнился на 847 рублей. Сколько денег положил на счет Федя, если известно, что комиссия менее 30%?
- 14) Приведите пример двузначного числа, у которого произведение цифр, умноженное на сумму цифр, равно 84.
- 15) Представьте число 2016 в виде суммы 7 последовательных натуральных чисел.
- 16) Сумма двух чисел равна 1465. Если к первому числу приписать справа 5, а во втором зачеркнуть последнюю цифру, то получатся равные числа. Найдите эти числа.
- 17) Решите ребус: ДА + ДА + ДА = ЕДА.
- 18) Решите ребус: ДВА + ТРИ = ПЯТЬ.
- 19) В этом ребусе по разу использованы все цифры от 0 до 9, причем одну цифру вам уже написали. Решите его: * * * × * 5 = * * * * *.
- 20) Сколько раз к наибольшему однозначному числу надо прибавить наибольшее двузначное, чтобы получить наибольшее трехзначное?
- 21) У Васи есть 6 карточек с цифрами 1, 2, 3, 4, 5 и 6. Используя их, можно составить два трехзначных числа, например, 645 и 321. Вася составил эти числа так, что их разность (из большего вычитают меньшее) оказалась самой маленькой из всех возможных. Найдите ее.
- 22) Счетчик показал шоферу, что машина прошла 15951 км. Шофер заметил, что число читается одинаково как слева направо, так и справа налево. Ровно через 2 часа счетчик показал новое число, обладающее такой же особенностью, причем его сосед заметил, что это ближайшее такое число. Определите, с какой скоростью ехал эти 2 часа шофер, если он ехал с постоянной скоростью.

- 23) Переложите в верхнем ребусе одну спичку так, чтобы равенство стало верным.

$$8 + 3 - 4 = 0$$

- 24) Переложите в каждом из нижних ребусов по две спички так, чтобы равенства стали верными.

$$3 \times 3 \times 3 = 5$$

- 25) Придумайте число, которое оканчивается цифрами 15, делится на 15 и имеет сумму цифр, равную 15.

- 26) Придумайте число, которое оканчивается цифрами 17, делится на 17 и имеет сумму цифр, равную 17.

$$3 \times 3 \times 3 = 55$$

- 27) Суммарный возраст членов семьи из 4 человек равняется 70, а 4 года назад равнялся 53. Сколько лет младшему члену семьи?

- 28) В семье четверо детей, им 5, 8, 13 и 15 лет. Их имена (написанные в перепутанном порядке): Таня, Юра, Света, Лена. Одна девочка ходит в детский сад, Таня старше Юры, а сумма лет Тани и Светы делится на 3. Сколько лет Лене?

- 29) Расставьте знаки арифметических действий: 5 5 5 5 = 2.

- 30) Расставьте знаки арифметических действий: 5 5 5 = 2.

- 31) Расставьте знаки арифметических действий: 5 5 5 5 = 111.

- 32) Сколько квадратов изображено на рисунке 4?

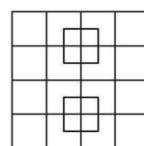


Рисунок 4

- 33) Сколько квадратов изображено на рисунке 5?

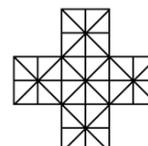


Рисунок 5

- 34) Сколько треугольников изображено на рисунке 6?

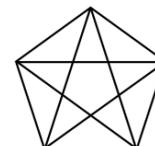
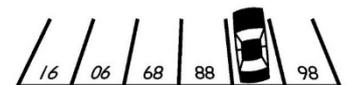


Рисунок 6

- 35) Гена пошел с папой в тир. Они договорились, что Гена делает 5 выстрелов, и за каждое попадание в цель получает право сделать еще 2 выстрела. Всего Гена сделал 17 выстрелов. Сколько раз он попал в цель?

- 36) Какую цифру надо приписать к числу 25771, чтобы получившееся шестизначное число делилось на 12?
- 37) Замените звездочки цифрами так, чтобы полученное число делилось без остатка на 99: $72 * * 3$.
- 38) Если к деньгам ПД добавить половину их, да еще 10 рублей, то у него станет 100 рублей. Сколько у ПД денег?
- 39) Деду 64 года, а внуку 16 лет. Через сколько лет дед станет втрое старше внука?
- 40) Корова вчетверо дороже собаки, а лошадь вчетверо дороже коровы. Собака, две коровы и лошадь стоят 200 рублей. Сколько стоит корова?
- 41) В день рождения дяди Федора почтальон Печкин хочет выяснить, сколько тому лет. Шарик говорит, что дяде Федору больше 11 лет, а кот Матроскин утверждает, что больше 10 лет. Сколько лет дяде Федору, если известно, что ровно один из них ошибся?
- 42) Кого больше: котов, кроме тех котов, которые не Васьки, или Васек, кроме тех Васек, которые не являются котами?
- 43) Мастер спорта Седов, кандидат в мастера Чернов и перворазрядник Рыжов встретились в клубе перед тренировкой.
- Обратите внимание, – заметил черноволосый, – один из нас седой, другой – рыжий, третий – черноволосый. Но ни у одного из нас цвет волос не совпадает с фамилией. Забавно, не правда ли?
- Ты прав, – подтвердил мастер спорта.
Какого цвета волосы у кандидата в мастера?
- 44) На столе лежат в ряд четыре фигуры: треугольник, круг, прямоугольник и ромб. Они окрашены в разные цвета: красный, синий, желтый, зеленый. Известно, что красная фигура лежит между синей и зеленой; справа от желтой фигуры лежит ромб; круг лежит правее и треугольника, и ромба; треугольник лежит не с краю; синяя и желтая фигуры лежат не рядом. Определите, в каком порядке лежат фигуры и какого они цвета.
- 45) Расставьте 4 точки на 6 отрезках так, чтобы каждая точка лежала ровно на трех отрезках.
- 46) Расставьте 6 точек на 4 отрезках так, чтобы каждая точка лежала ровно на двух отрезках.
- 47) Расставьте 10 точек на 5 отрезках так, чтобы каждая точка лежала ровно на двух отрезках.
- 48) Напишите следующий элемент последовательности: О, Д, Т, Ч, П, Ш, С, В, Д, ?
- 49) Напишите следующий элемент последовательности: П, В, С, Ч, П, С, ?
- 50) Напишите следующий элемент последовательности: М, В, З, М, Ю, С, У, ?
- 51) Один сапфир и два топаза
Ценней, чем изумруд, в три раза.
А семь сапфиров и топаз
Его ценнее в восемь раз.
Определить мы просим вас,
Сапфир ценней или топаз?
- 52) За десять дней пират Ерема
Способен выпить бочку рома,
А у пиратушки Емели
Ушло б на это две недели.
За сколько дней прикончат ром
Пираты, действуя вдвоем?
- 53) На какое максимальное количество частей можно разделить пиццу за шесть разрезов?
- 54) Пять рыбаков съели пять судаков за пять дней. За сколько дней десять рыбаков съедят десять судаков?
- 55) Расставьте числа 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4 в таком порядке, чтобы между единицами оказалась одна цифра, между двойками – две, между тройками – три, а между четверками – четыре цифры.
- 56) Имеется 95 маленьких кубиков с ребром в 1 см. Из них сооружается самый большой из возможных кубов. Сколько маленьких кубиков осталось неиспользованными?
- 57) Какой номер написан под припаркованной машиной?
- 58) Решите ребус: WIND · OF = CHANGE.
- 59) Куб со стороной 10 см покрасили в синий цвет, после чего распилили на кубики размером $1 \times 1 \times 1$ см. Сколько среди них оказалось кубиков с одной окрашенной стороной?



Рейтинг 2 – Метод Математической Индукции

ДЗ №1

- 1) Докажите, что утверждение верно для любого натурального n :

А) $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$;

Б) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$;

Рейтинг 2, продолжение – Логика

Логическая классная работа

- 1) Правда или ложь?
- А) $\neg((7 \cdot 5 \leq 6) \wedge (2 \cdot 2 = 0))$;
Б) $(\neg(2 - 3 < 4)) \vee (2 - 3 = -1) \wedge (5 \cdot 8 \leq 48)$;
В) $\neg((2 - 3 < 4) \vee (2 - 3 = -1)) \wedge (5 \cdot 8 \leq 48)$;
Г) $(\neg(2 - 3 < 4)) \vee ((2 - 3 = -1) \wedge (5 \cdot 8 \leq 48))$;
Д) $((2^2 < 4) \vee (7 > 5)) \rightarrow \neg(5 > 8)$;
Е) $(2^2 < 4) \vee ((7 > 5) \rightarrow \neg(5 > 8))$;
Ж) $\neg(2 + 2 = 8) \rightarrow ((3 = 5) \rightarrow (7 < 9))$;
З) $(\neg(2 + 2 = 8) \rightarrow (3 = 5)) \rightarrow (7 < 9)$;
И) $(\neg((2 + 2 = 8) \rightarrow (3 = 5))) \rightarrow (7 < 9)$.
- 2) Рыцари (Р) и лжецы (Л) живут на острове...
- А) В сказал А: «А, ты лжец». Какие из утверждений истинны?
а) $A - Л$; б) $B - Л$; в) A и B – разные;
г) $B - Р, A - Л$; д) $A - Р, B - Л$; е) $B - Л \rightarrow A - Р$.
- Б) Известно, что если $A - Р$, то и $B - Р$. Какие из утверждений истинны?
а) $A - Р$; б) A и B – одинаковые; в) $A - Л \rightarrow B - Л$;
г) $B - Р \rightarrow A - Р$; д) $B - Л \rightarrow A - Л$.
- В) А сказал: «Если я – Л, то и $B - Л$ ». Какие из утверждений истинны?
а) $A - Л \rightarrow B - Л$; б) $A - Л$; в) $A - Р \rightarrow B - Л$;
г) $A - Р \rightarrow B - Р$; д) A и $B - Л$; е) $B - Р \rightarrow A - Р$;
ж) если $A - Р$, то $B - ?$; з) $A - Л \rightarrow B - Р$; и) $(A - Р) \vee (B - Л)$.
- 3) Известно, что если Петя не видел Колю на улице, то либо Коля ходил в кино, либо Петя сказал правду. Если Коля не ходил в кино, то Петя не видел Колю на улице и Коля сказал правду. Если Коля сказал правду, то либо он ходил в кино, либо Петя солгал. Выясните, ходил ли Коля в кино.

Матбой за полчаса? Логично!

- 1) Путешественник встретил трех островитян, сидящих за круглым столом: рыцаря, хитреца и лжеца. На вопрос «Кто твой сосед справа?» все трое ответили по-разному. Может ли путешественник узнать, кто есть кто?
- 2) У подводного царя служат осьминоги с шестью, семью или восемью ногами. Те, у кого 7 ног, всегда лгут, а те, у кого 6 или 8 ног, всегда говорят правду. Встретились четыре осьминога. Синий сказал: «Вместе у нас 28 ног», зеленый: «Вместе у нас 27 ног», желтый: «Вместе у нас 26 ног», красный: «Вместе у нас 25 ног». У кого сколько ног?
- 3) Четырех жителей Непалонезии зовут Пей, Чай, Жуй и Джем. Фамилии у них те же, что и имена, но ни у кого из четверых имя и фамилия не совпадают. Фамилия Чаю не Пей. Определите имя и фамилию каждого, если имя непалонезийца с фамилией Жуй совпадает с фамилией того, имя которого совпадает с фамилией Джема.
- 4) Suppose A says, «Either I am a knave or B is a knight.» What are A and B ? (knave – лжец, *англ*)

Убийственное ДЗ №5

Собрались однажды Удав, Мартышка, Попугай и Слононок и решили измерить длину Удава. Встали они друг за другом по одному. По секрету скажу, что Мартышка всегда лжет, Удав говорит правду, Попугай просто повторяет последний услышанный ответ (а если его спросить первым, ответит как попало), а Слононок дает честный ответ, но на предыдущий заданный ему вопрос (а на первый вопрос отвечает как попало).

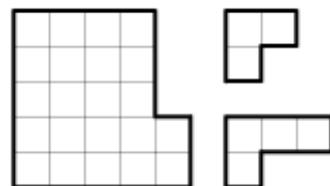
Проходил мимо них Ежик в тумане и решил выяснить, в каком порядке они стоят (он ничего не смог увидеть – он ведь в тумане!). Спросив всех по очереди: «Ты Мартышка?», он понял лишь только, где находится Слононок. Спросив всех в том же порядке: «Ты Слононок?», у него получилось еще понять, где Мартышка, но полной ясности так и не наступило. И лишь после того как на вопрос «Ты Попугай?»

первый ответил «Да», Ежу, наконец, стало ясно, в каком порядке стояли животные. Так в каком же?
Примечание: «Как попало» означает, что один из ответов «Да» или «Нет» выбирается произвольно.

Математическая дуэль

Левая сторона

- 1) По порядку без пропусков записывают все подряд идущие натуральные числа:
12345678910111213 ...
На каком месте слева в этом ряду окажется десятый нуль?
- 2) Сколько существует трехзначных чисел, все цифры которых – простые числа и все двузначные числа, которые можно получить, стерев одну из этих цифр, – тоже простые? (Простыми называются числа, которые делятся только на себя и на единицу. Единица не считается простым числом.)
- 3) Длина и ширина зала составляют целое число метров, а его площадь – 100 м^2 . Чему может равняться периметр зала? Укажите все варианты.
- 4) Можно ли разрезать квадрат на 10 частей и составить из них три квадрата?
- 5) Незнайка разрезал фигуру на трехклеточные и четырехклеточные уголки, нарисованные справа от нее. Сколько трехклеточных уголков могло получиться? (Укажите все варианты и для каждого варианта нарисуйте пример разрезания.)
- 6) Старший брат идет от дома до школы 12 минут, а младший – 16 минут. Сколько минут потребуется старшему брату, чтобы догнать младшего, если тот вышел на одну минуту раньше?
- 7) Если книга подорожает на 50 рублей, то она будет вчетверо дороже, чем если подешевеет на 100 рублей. Сколько стоит книга сейчас?
- 8) Иван Иванович купил собаку. Саша думает, что эта собака – черный пудель, Паша считает ее белой болонкой, а Маша – белым бульдогом. Известно, что каждый из ребят верно угадал либо породу, либо цвет шерсти собаки. Назовите породу собаки и цвет ее шерсти.
- 9) На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Путник встретил троих островитян и спросил каждого из них: «Сколько среди вас рыцарей?». Первый ответил: «Ни одного». Второй сказал: «Трое». Что сказал третий?
- 10) Собрались три попугая – Гоша, Кеша и Рома. Один из них всегда говорит правду, другой всегда лжет, а третий – хитрец, он иногда говорит правду, иногда лжет. На вопрос: «Кто Кеша?» – попугаи ответили так: Гоша: «Кеша лжец». Кеша: «Я хитрец!» Рома: «Он абсолютно честный попугай». Кто же из попугаев честный, кто лжец, а кто хитрец?



Правая сторона

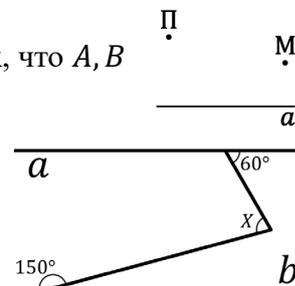
- 11) Сколько квадратов натуральных чисел среди чисел $1, 2, 3, 4, \dots, 2018$?
- 12) Найдите сумму всех трехзначных чисел.
- 13) Числа от 1 до 99 записали в ряд. Под каждым числом подписали произведение его цифр. С получившимся рядом проделали то же самое и т.д. Сколько нечетных чисел в пятом ряду?
- 14) Покажите, как разрезать квадрат на 12 одинаковых треугольников.
- 15) Можно ли разрезать квадрат на 2018 прямоугольников, у каждого из которых одна сторона вдвое длиннее другой?
- 16) Из 27 одинаковых кубиков составили один большой куб. Во сколько раз площадь поверхности большого куба больше, чем площадь поверхности маленького?
- 17) Зайчиха купила для своих семерых зайчат семь барабанов разных размеров и семь пар палочек разной длины. Если зайчонок видит, что у него и барабан больше, и палочки длиннее, чем у кого-то из братьев, он начинает громко барабанить. Какое наибольшее число зайчат сможет начать барабанить?
- 18) Пять футбольных команд провели турнир – каждая команда сыграла с каждой по разу. За победу начислялось 3 очка, за ничью – 1 очко, за проигрыш очков не давалось. Четыре команды набрали соответственно 1, 2, 5 и 7 очков. А сколько очков набрала оставшаяся команда?
- 19) Обезьянки – Маша, Даша, Глаша и Наташа – съели на обед 16 мисочек манной каши. Каждой обезьянке что-то досталось. Глаша и Наташа вместе съели 9 порций. Маша съела больше Даши, больше Глаши и больше Наташи. Сколько мисочек каши досталось обезьянке Даше?

- 20) Мама хочет узнать у Пети, какие оценки он получил сегодня.
- Петя, сколько из твоих оценок – пятерки?
 - Все, кроме двух.
 - А сколько из твоих оценок – четверки?
 - Тоже все, кроме двух. Но ты не волнуйся, мама, единиц и двоек у меня нет.
- Сколько каких оценок у Пети? Перечислите все возможные варианты!

Рейтинг 2, окончание – Построения циркулем и линейкой

СР по построению

- 1) На плоскости отмечены точки A и B . Изобразите множество точек M таких, что A, B и M образуют равнобедренный треугольник.
- 2) Паучок очень голодный и заметил муху. Как ему быстрее всего до нее добраться, если ему надо по пути зайти на прямую a ?
- 3) На рисунке справа прямые a и b параллельны. Перерисуйте этот чертеж и найдите угол X .
- 4) Дан угол в 63° . С помощью циркуля и линейки разделите его на 7 частей.



Необязательное ДЗ по мотивам СР

- 1) Как нужно ударить по бильярдному шару, чтобы он, отразившись от всех бортов стола, вернулся в исходную точку? Постройте соответствующую траекторию.
- 2) С помощью циркуля и линейки проведите трисекцию данного угла в 63° .
- 3) Дан угол 19° . С помощью циркуля и линейки разделите его на 19 частей.