

## Рейтинг 3 – А ты поступил в ФТШ?

### Классная работа №1: Олимпиадная лавина

#### Конструкция

- А. Журнал «Пять Эйнштейнов и Барсук» учредил премию тому, кто разложит 100 конфет на 10 кучек так, чтобы в каждой кучке было разное число конфет, но никакую из них нельзя было бы разбить на две так, чтобы число конфет во всех 11 кучках оставалось различным. Интересно, удастся ли кому-нибудь получить премию?
- В. Экономная мама хочет пришить 2 заплатки в форме неравных квадратов на разорвавшиеся брюки своего сыночка. У нее есть квадратный кусок ткани размером  $5 \times 5$ . Сможет ли это у нее получиться, если она хочет израсходовать всю приготовленную для заплаток ткань?
- С. Лилипуты и минипуты живут на земле, имеющей форму прямоугольника, и вечно враждуют из-за своих границ. Можно ли проложить границу внутри прямоугольника так, чтобы она делила прямоугольник на 2 равных (во избежание войны!) семиугольника? А шестиугольника?

#### Геометрия

- А. В  $\triangle ABC$   $\angle B = 20^\circ$ ,  $\angle C = 40^\circ$ .  $AM$  – биссектриса,  $AM = 2$  см. Найти  $BC - AB$ .
- В. В  $\triangle ABC$  проведены высоты  $AP$  и  $CN$ . Прямые  $AP$  и  $CN$  пересекаются в точке  $H$ , лежащей внутри треугольника. Может ли  $\angle AHC = 89^\circ$ ?
- С. На стороне  $BC$  квадрата  $ABCD$  во внешнюю сторону построен равнобедренный  $\triangle BEC$  с основанием  $BC$ .  $\angle EAD = 75^\circ$ . Найти  $\angle BEC$ .

#### Числа! Числа!

- А. Какая цифра в ряду чисел 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 ... 2019 стоит на 2019-м месте?
- В. Сравните числа  $\frac{2018}{2019}$  и  $\frac{20182019}{20192018}$ .
- С. Сколько существует треугольников, каждый из которых имеет углы, градусные меры которых выражаются простыми числами?

#### Алгебра

- А. Известно, что  $(a - b + 2019)$ ,  $(b - c + 2019)$  и  $(c - a + 2019)$  – три последовательных целых числа. Найдите эти числа.
- В. Положительные числа  $a$  и  $b$  таковы, что  $a^2 + b = b^2 + a$ . Александр Алексеевич поспорил с Анатолием Валерьевичем на шоколадку, что обязательно  $a = b$ . Кто выиграл спор?
- С. Натуральное число назовем складным, если его можно представить в виде суммы как четырех, так и пяти последовательных натуральных чисел. Сколько существует складных пятизначных чисел?

#### Текстовые задачи

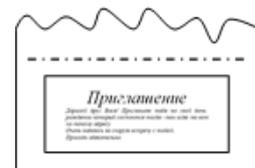
- А. У Александра Алексеевича были монеты достоинством в 1 рубль и 1 копейку, причем копеек было меньше, чем на рубль. Покупая продукты, Александр Алексеевич потратил половину всей суммы. После этого у него снова оказались только рубли и копейки, причем копеек оказалось столько, сколько в начале было рублей, а рублей оказалось вдвое меньше, чем в начале было копеек. Сколько денег было у Александра Алексеевича первоначально?
- В. 666 лжецов и рыцарей сидят за круглым столом (среди сидящих есть как рыцари, так и лжецы). На вопрос: «сколько лжецов рядом с тобой?» все сказали: «два». Сколько лжецов может сидеть за столом?
- С. Одна тетрадь, 3 блокнота и 2 ручки стоят 98 рублей, а три тетради и блокнот – на 36 рублей дешевле 5 ручек. Сколько стоит каждый из предметов, если тетрадь стоит четное число рублей? (Каждый из предметов стоит целое число рублей.)
- Д. Десять депутатов сидят за круглым столом. После оживленной дискуссии некоторые из них дали другим пощечины. Оказалось, что если взять любых двух депутатов, сидящих рядом за столом, то каждый из остальных восьми дал пощечину кому-то из этих двоих. Докажите, что какие-то двое из депутатов дали пощечины друг другу.

- Е. Вася сбегает по эскалатору, едущему вниз, не пропуская ни одной ступеньки. Скорость Васи вдвое больше скорости эскалатора. Пока Вася ехал, он пробежал 80 ступеней. Сколько ступеней он пробежит, если будет сбегать по неподвижному эскалатору?

### Классная работа №2: ООАУ-2019 (20 января 2019 года, 7 класс)

- Составьте из цифр от 1 до 6 арифметическое выражение, значение которого равно 2019, причем только одну цифру можно использовать более одного раза.
- У Славы-Х много друзей. Он приготовил для них приглашения на свой день рождения так: на каждый лист напечатал несколько одинаковых приглашений (как на рисунке) и затем каждый лист разрезал. Получилось так, что количество подготовленных приглашений совпало с количеством друзей. Сколько друзей может быть у Славы, если он сделал 9 разрезов?
- Найдите все  $x$  и  $y$ , удовлетворяющие уравнению
 
$$(y - x - 1)^2 + (y + x)^2 = 0.$$
- В 8 классе лица ФТШ учиться нелегко. Каждый день, с понедельника по субботу, каждый восьмиклассник сдает домашнее задание по алгебре. Некоторые из них проверяет учитель, а некоторые одноклассники проверяют друг у друга. За прошедшую неделю ровно половина восьмиклассников получила по два домашних задания на проверку, другая половина получила по одному, а учителю досталось еще 108 заданий. Сколько человек в 8 классе лица ФТШ?
- В прямоугольном треугольнике одна из сторон равна 8, а площадь равна 24. Чему может быть равна высота, проведенная из вершины прямого угла? Приведите все возможные варианты.
- Найдите натуральные числа  $m$  и  $n$ , если известно, что из трех следующих утверждений два истинны, а одно ложно:
 

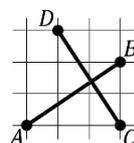
А)  $2m + 7n = 115$ ;                      Б)  $7m + 2n = 115$ ;                      В)  $6m + 11n = 210$ .



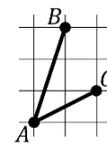
### Рейтинг 3, продолжение – Геометрия

#### ДЗ №1: Расчет углов в равных треугольниках, дополнительные построения

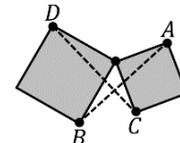
- Докажите, что отрезки  $AB$  и  $CD$  на клетчатой бумаге перпендикулярны.
- Найдите угол  $BAC$ , изображенный на клетчатой бумаге.
- Два квадрата имеют общую вершину. Докажите, что отрезки  $AB$  и  $CD$  перпендикулярны.
- Равносторонние треугольники  $ABC$  и  $CDK$  расположены так, как показано на рисунке. Докажите, что прямая  $BK$  параллельна  $AC$ .
- На сторонах равностороннего треугольника  $ABC$  взяли точки  $D$  и  $E$  так, что отмеченный на рисунке угол равен  $60^\circ$ . Докажите, что отрезки  $AE$  и  $BD$  равны.
- Квадраты  $ABCD$  и  $DEFK$  имеют общую вершину  $D$ , причем вершина  $E$  лежит на стороне  $AB$ . Верно ли, что точки  $B$ ,  $C$  и  $K$  лежат на одной прямой?
- Один из углов треугольника в два раза больше другого. Высота, опущенная из третьего угла, делит сторону на два отрезка. Докажите, что разность этих отрезков равна одной из сторон треугольника.
- В треугольнике  $ABC$  провели биссектрису  $BE$ . Оказалось, что  $BC + CE = AB$ . Докажите, что один из углов треугольника в два раза больше другого.
- На боковых сторонах равнобедренного треугольника  $ABC$  взяли точки  $M$  и  $K$  так, что  $AM = CK$ . Может ли оказаться, что прямая  $MK$  не параллельна  $AC$ ?
- На стороне  $CD$  и на продолжении стороны  $AD$  квадрата  $ABCD$  взяли точки  $K$  и  $E$  так, что  $CK = AE$ . Найдите угол  $BEK$ .
- Три стороны четырехугольника равны 1. Найдите его четвертую сторону, если два угла, не прилегающих к этой стороне, равны  $120^\circ$ .



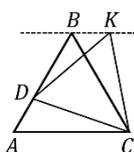
К задаче 1



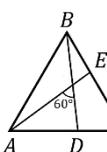
К задаче 2



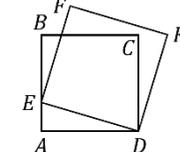
К задаче 3



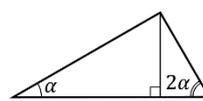
К задаче 4



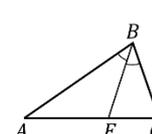
К задаче 5



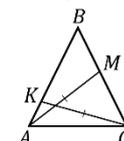
К задаче 6



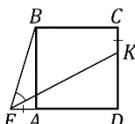
К задаче 7



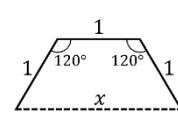
К задаче 8



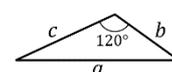
К задаче 9



К задаче 10



К задаче 11



К задаче 12

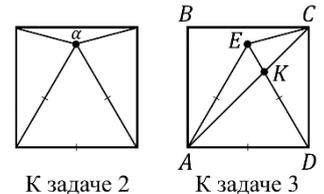
- 12) Стороны треугольника равны  $a$ ,  $b$  и  $c$ . Напротив стороны длины  $a$  в треугольнике лежит угол  $120^\circ$ . Докажите, что из отрезков  $a$ ,  $b$  и  $b + c$  можно сложить треугольник. Чему равен средний угол получившегося треугольника?

### ДЗ №1,5: шутливо о серьезном...

- 0) Не позднее 19 января зарегистрируйтесь на Открытую олимпиаду Академического университета: [school.ioffe.ru/school/admission/register](http://school.ioffe.ru/school/admission/register).
- 1) Придите в ФТШ **20 января в 9:30 утра** и напишите олимпиаду.
- 2) Решите все 6 задач по математике.
- 3\*) Получите полный балл за математическую часть.
- If you don't manage at least of 1-3 start again from the very beginning.

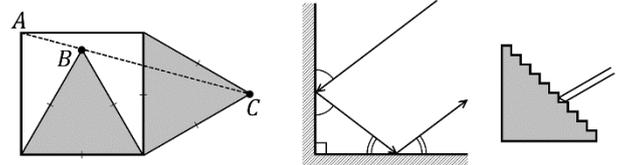
### ДЗ №2

- 1) Угол между высотой и биссектрисой, проведенными из одного угла треугольника, равен  $\alpha$ . Найдите разность двух других его углов.
- 2) На стороне квадрата внутрь его построили равносторонний треугольник. Найдите угол  $\alpha$  на чертеже.
- 3) На стороне квадрата  $ABCD$  построили равносторонний треугольник  $AED$ . Диагональ  $AC$  пересекает его сторону  $ED$  в точке  $K$ . Верно ли, что треугольник  $CEK$  равнобедренный?
- 4) На двух сторонах квадрата построены равносторонние треугольники. Лежат ли отмеченные на рисунке точки  $A$ ,  $B$  и  $C$  на одной прямой?
- 5) Луч света последовательно отражается от двух взаимно перпендикулярных зеркал. Докажите, что он «возвращается» по параллельному направлению. (Считается известным, что угол падения луча света на зеркало равен углу его отражения.)



К задаче 2

К задаче 3

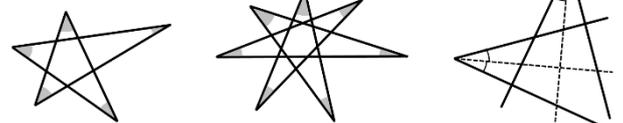


К задаче 4

К задаче 5

**Замечание:** на этом принципе основана работа катафота или уголкового отражателя: если размеры одного «уголка» зеркальной «лесенки» малы, то катафот возвращает световой луч приблизительно туда, откуда он пришел.

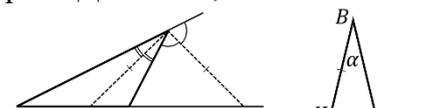
- 6) Чему равна сумма углов при вершинах произвольной пятиконечной звезды?
- 7) Тот же вопрос для такой семиугольной замкнутой ломаной, которая показана на рисунке.
- 8) Два угла расположены так, что их стороны взаимно перпендикулярны. Докажите, что  
А) величины этих углов равны;  
Б) биссектрисы перпендикулярны друг другу.
- 9) Биссектриса одного угла треугольника равна биссектрисе его внешнего угла при той же вершине (см. рисунок). Найдите разность двух других углов треугольника.



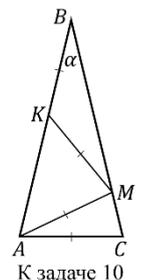
К задаче 6

К задаче 7

К задаче 8



К задаче 9

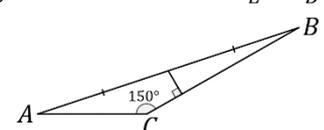
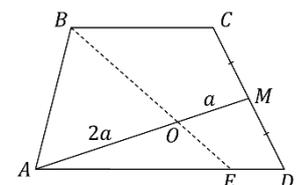


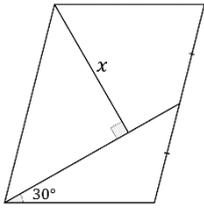
К задаче 10

- 10) На боковых сторонах  $AB$  и  $BC$  равнобедренного треугольника  $ABC$  взяли точки  $M$  и  $K$  соответственно так, что  $BK = KM = AM = AC$ . Найдите угол треугольника, противоположный основанию.

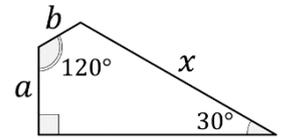
### ДЗ №3

- 1) В трапеции  $ABCD$  точка  $M$  – середина боковой стороны  $CD$ . На отрезке  $AM$  взяли точку  $O$  так, что  $AO : OM = 2 : 1$ . Прямая  $BO$  пересекает основание  $AD$  в точке  $E$ . Докажите, что отрезок  $AE$  равен средней линии трапеции.
- 2) Из медиан данного треугольника составили новый треугольник. В нем провели произвольную медиану. Докажите, что она составляет  $3/4$  одной стороны прежнего треугольника.
- 3) Угол  $C$  треугольника  $ABC$  равен  $150^\circ$ . Из середины стороны  $AB$  на сторону  $BC$  опустили перпендикуляр. Найдите длину этого перпендикуляра, если  $AC = 1$ .





- 4) Вершину параллелограмма соединили с серединой его противоположной стороны (см. слева). Полученный отрезок образует с другой его стороной угол  $30^\circ$ . Докажите, что отмеченный на рисунке перпендикуляр равен одной из сторон параллелограмма.
- 5) Выразите сторону четырехугольника, обозначенную буквой  $x$  на рисунке справа, через его стороны  $a$  и  $b$ .

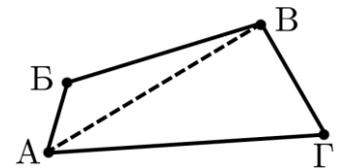


### КР №2

- 1) Треугольник, один из углов которого равен  $40^\circ$ , разрезали биссектрисами на 6 треугольников, среди которых есть прямоугольные. Какими могли быть остальные углы исходного треугольника?
- 2) А) Можно ли расположить на плоскости (но не на одной прямой!) 5 точек так, чтобы выполнялось условие: «если три точки являются вершинами треугольника, то это треугольник – прямоугольный»?  
Б) А можно ли расположить на плоскости 6 точек так, чтобы любые три из них образовывали равнобедренный треугольник?
- 3) Как разрезать произвольный треугольник на три части так, чтобы из них можно было сложить прямоугольник?
- 4) А) Докажите, что средняя линия трапеции (то есть отрезок, соединяющий середины ее боковых сторон) равна полусумме оснований, если известно, что она им параллельна.  
Б) Докажите, что отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции, равен полуразности ее оснований.

### КДР №4

- 1) Аня, Боря, Вася и Гоша пошли в поход. Каждый из них жил в своей палатке, причем разбили они их, как показано на рисунке. Известно, что между палатками Ани и Бори – 4 метра, Бори и Васи – 5 метров, Васи и Гоши – 2 метра, Гоши и Ани – 9 метров. Сколько метров между палатками Ани и Васи, если это расстояние – целое число?
- 2) Два равнобедренных треугольника  $ABC$  и  $ADC$  имеют общее основание  $AC$ . Вершины  $B$  и  $D$  расположены по разные стороны от  $AC$ . Точка  $E$  лежит на отрезке  $BD$ , но не лежит на отрезке  $AC$ . Докажите, что  $\angle EAC = \angle ACE$ .
- 3) В остроугольном треугольнике  $ABC$  проведены медиана  $BM$  и высота  $CH$ . Найдите длину  $AC$ , если  $MH = 10$  см.
- 4) Медиана и высота делят угол на 3 равные части. Докажите, что треугольник прямоугольный.
- 5) Найдите углы равнобедренного треугольника, если одним отрезком, проведенным из одной из его вершин на противоположную сторону, его можно разрезать на два меньших равнобедренных треугольника.
- 6) Дан прямоугольник  $ABCD$ , причем  $AB = 3BC$ . На стороне  $CD$  отмечены точки  $E$  и  $F$  так, что  $CE = EF = FD$ . Докажите, что сумма углов  $\angle ACD + \angle AED + \angle AFD$  равна  $90^\circ$ .
- 7) Из бумаги сделали два одинаковых выпуклых четырехугольника. Первый из них разрезали по одной диагонали, второй – по другой. Можно ли из четырех полученных треугольников составить параллелограмм?
- 8) На сторонах  $BC$  и  $CD$  квадрата  $ABCD$  взяли точки  $K$  и  $M$  так, что угол  $MAK$  равен  $45^\circ$ . Докажите, что  $BK + DM = MK$ .
- 9) Найдите расстояние от центра ромба до его стороны, если острый угол ромба равен  $30^\circ$ , а сторона равна 4.
- 10) В равнобедренном треугольнике основание  $AC$  равно 1, угол  $B$  равен  $91^\circ$ . Докажите, что  $1 < 2AB < 2$ .



### Внезапная самостоятельная работа :)

- 1) Вася взял 10 карточек с цифрами от 0 до 9 и сделал из них десятизначное составное число. Васина собачка Тузик утащила самую правую карточку, но оставшееся девятизначное число снова оказалось составным. Собачка прибежала еще 8 раз, уносила каждый раз самую правую карточку, но ни разу после ее ухода не оставалось простое число. Какое число мог придумать Вася?

- 2) Найдите значение выражения:  
 $(8 + 222 \cdot 444 \cdot 888 + 444 \cdot 888 \cdot 1776) / (2 \cdot 4 \cdot 8 + 444 \cdot 888 \cdot 1776 + 888 \cdot 1776 \cdot 3552)$ .
- 3) Гоша покупал в магазине один килограмм сыра и хлеб. Он не заметил, что цена сыра указана за 100 граммов, и посчитал, что должен заплатить 84 рубля. Но на кассе с него взяли 471 рубль. Сколько стоит килограмм сыра и хлеб по отдельности?
- 4) В автобусе ехало меньше 100 человек, причем сидящих пассажиров было вдвое больше числа стоящих. На остановке 4% пассажиров вышло. Сколько пассажиров осталось в автобусе?
- 5) Дан неравносторонний прямоугольный треугольник. Назовем прямую «замечательной», если все три вершины треугольника одинаково удалены от нее.  
 А) Нарисуйте хотя бы одну «замечательную» прямую.  
 Б) Сколько всего «замечательных» прямых можно провести?
- 6) Сергей Юрьевич выписал на доске все 5-значные числа, из которых вычеркиванием одной цифры можно получить число 1111, а Евгений Николаевич – все числа для числа 1234. У кого из них получилось больше чисел?

### Словарик геометрических терминов

#### Угол

Определение  
 Полный, развернутый, прямой  
 Смежные углы  
 Вертикальные углы (O, C)  
 Градусная мера  
 Биссектриса (O, C)  
 Трисекция

#### Прямоугольный треугольник

Катет  
 Признаки равенства  
 Гипотенуза  
 Т Пифагора  
 Т о медиане к гипотенузе  
 Т об угле в  $30^\circ$

#### Треугольник

Определение  
 Остроугольный, прямоугольный, тупоугольный  
 Признаки равенства  
 Равнобедренный (O, C)  
 Равносторонний (O, C)  
 Медиана (O, т. пер.)  
 Биссектриса (O, т. пер.)  
 Высота (O, т. пер.)  
 Средняя линия (O, C)  
 Т о сумме углов

#### Параллельные прямые

Определение  
 Односторонние углы  
 Внутренние углы  
 Накрест лежащие углы