Краткий конспект по комбинаторике

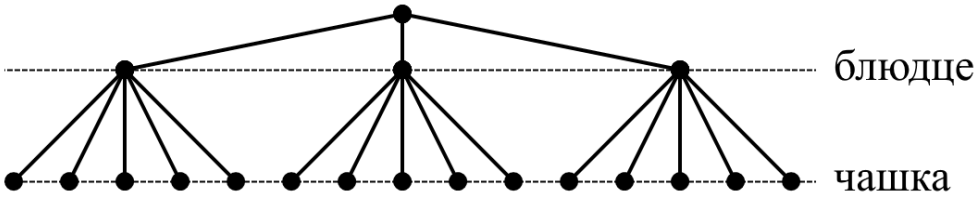
Комбинаторика – раздел математики, изучающий дискретные объекты, множества (сочетания, перестановки, размещения и перечисления элементов) и отношения на них (например, частичного порядка).

Говоря простым языком, комбинаторика изучает задачи, основным вопросом которых является «Сколькими способами/вариантами/…»

Вся комбинаторика базируется на нескольких правилах.

В магазине «Все для чая» есть 5 разных чашек и 3 разных блюдца. Сколькими способами можно купить чашку с блюдцем?

Нетрудно догадаться, что всего есть $3 \cdot 5 = 15$ способов, так как блюдце можно выбрать тремя способами, и для каждого из них есть 5 способов добавить чашку:



Давайте немного усложним задачу.

В магазине «Все для чая» есть еще 4 чайные ложки. Сколькими способами можно купить комплект из чашки, блюдца и ложки?

Тут можно воспользоваться результатом предыдущей задачи. Есть 15 способов собрать пару «чашка-блюдце», для каждого из которых есть 4 способа выбрать ложку, то есть всего $15 \cdot 4 = 60$ способов.

На примере этих задач можно сформулировать

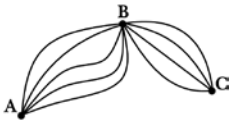
Правило умножения. Пусть объект A можно выбрать n способами и после каждого такого выбора объект B можно выбрать m способами. Тогда выбор пары (A, B) можно осуществить nm способами.

Другими словами, если два выбора *взаимосвязаны*, то количества способов их сделать *перемножаются*.

Задачи для самостоятельного решения.

Монету бросают трижды. Сколько разных последовательностей орлов и решек можно получить?

В Стране Чудес есть три города: A, B и C. Из города A в город B ведет 5 дорог, а из города B в город C – 4 дороги (см. рисунок). Сколькими способами можно проехать от A до C?



Но не все количества способов надо перемножать.

В магазине «Все для чая» по-прежнему продаются 5 чашек, 3 блюдца и 4 чайные ложки. Сколькими способами можно купить два предмета с разными названиями?

Тут есть три различных случая – купить пару «чашка-блюдце», «чашка-ложка» и «блюдце-ложка». Их можно выбрать 15, 20 и 12 способами соответственно. Но эти три числа перемножать нельзя, так как эти случаи несовместны и друг от друга никак не зависят (то есть будет три несвязанных «дерева» по аналогии с первой задачей), поэтому их надо сложить: $15 + 20 + 12 = 47$ способов.

То есть, помимо правила умножения, есть еще и

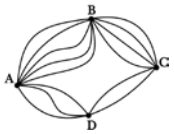
Правило сложения. Пусть некоторый объект A можно выбрать n различными способами, а другой объект B можно выбрать m способами. Тогда существует $n + m$ способов выбрать либо объект A, либо объект B.

Другими словами, если два выбора между собой *не связаны* или *исключают* друг друга, то количества способов их сделать *складываются*.

Задачи для самостоятельного решения.

У двух начинающих коллекционеров по 20 марок и 10 значков. Честным обменом называется обмен марки на марку или значка на значок. Сколькими способами коллекционеры могут осуществить честный обмен?

В Стране Чудес построили еще один город – D и несколько новых дорог (см. рисунок). Сколькими способами можно добраться из города A в город B?



С помощью этих двух правил можно решить любую комбинаторную задачу. Однако есть один прием, позволяющий решать некоторые задачи быстрее.

Кубик бросают трижды. Среди всех возможных последовательностей результатов есть такие, в которых хотя бы один раз встречается шестерка. Сколько их?

Если решать эту задачу «в лоб», то придется перебирать несколько случаев:

1) шестерка выпала ровно один раз – $1 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3 = 75$ способов (1 способ для броска шестерки, по 5 способов для остальных бросков и три способа выбрать тот бросок, в который выпала шестерка);
2) шестерка выпала ровно два раза – $1 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 3 = 15$ способов;
3) шестерка выпала три раза – 1 способ.

Итого получается $75 + 15 + 1 = 91$ способ.

Но можно решить и быстрее, подметив тот факт, что все последовательности бросков (коих $6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^3 = 216$) разделяются на те, в которых есть хотя бы одна шестерка, и те, в которых шестерка не выпадала вообще (таких вариантов $5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3 = 125$). То есть вместо того, чтобы считать нужное количество, можно просто вычесть из общего количества последовательностей все «плохие»: $6^3 - 5^3 = 91$ способ.

Обобщая идею решения этой задачи, можно сформулировать

Правило вычитания. Пусть существует n различных *исходов* некоторого события, среди которых некоторым свойством обладают m исходов. Тогда существует $n - m$ исходов, не обладающих этим свойством.

Другими словами, для нахождения количества *подходящих* вариантов Q^+ можно найти общее количество вариантов Q и вычесть из него все *неподходящие* варианты Q^-.

Задачи для самостоятельного решения.

Сколькими способами можно поставить на шахматную доску белую и черную ладьи так, чтобы они не били друг друга?

Сколько существует 6-значных чисел, в записи которых участвует хотя бы одна нечетная цифра?

У автомобиля может быть 999 различных чисел в номере – от 001 до 999.

А) Сколько номеров состоят только из единиц, двоек и троек?

Б) Сколько номеров не содержат нулей?

В) По примете, номер с семеркой – счастливый. Сколько счастливых номеров?

Хотя любую комбинаторную задачу можно решить с помощью правил умножения и сложения, очень многие задачи (или *подзадачи*) можно «сгруппировать» в несколько стандартных классов, которые будут рассмотрены далее.

Сколькими способами можно переставить буквы в именах ваших преподавателей «ПАВЕЛ» и «ТАТЬЯНА»?

С именем «ПАВЕЛ» все довольно очевидно. Есть пять мест: на первое место можно поставить любую из 5 букв, на второе – любую из четырех (так как одну уже поставили на первое) и т.д. От постановки каждой буквы зависит выбор последующих (да и результирующее «слово»), значит, работает правило умножения: $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ способов.

А вот с именем «ТАТЬЯНА» немного сложнее, так как есть повторяющиеся буквы. Если бы они были разными (например, «ТАтЬЯНа»), то задача решалась бы аналогично предыдущей, то есть получилось бы $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$ способов. Осталось понять, сколько раз повторяется каждый способ расстановки. Рассмотрим одну из получающихся последовательностей. Если поменять буквы «Т» местами, то слово не изменится (2 повтора), и если поменять буквы «А» местами, то так же ничего не поменяется (еще 2 повтора). Значит, в действительности существует

$$\frac{5040}{2 \cdot 2} = 1260$$

способов переставить буквы в имени «ТАТЬЯНА».

Подобные задачи (в которых присутствует глагол «переставить» или его синонимы) относят к **задачам на перестановки**.

Перестановки без повторений. Пусть дано n различных объектов, которые надо расставить на n мест в определенной последовательности. Это можно сделать

$$P_n = n!$$

различными способами.

$n!$ (читается «n факториал») – это произведение всех натуральных чисел от 1 до n включительно:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n.$$

Отдельно вводится число $0! = 1$.

Буква P взята от слова «permutation» – «подстановка», «перестановка» в переводе с английского.

Раз есть перестановки без повторений, то есть и с повторениями, для получения общей формулы которых полезно решить еще одну задачу.

Сколькими способами можно переставить буквы в имени «АЛЕКСАНДРА»?

Если бы все буквы были разными, то получилось бы $P_{10} = 10! = 3628800$ способов. Однако, тут есть повторяющаяся три раза буква «А». Сколькими способами их можно переставить в каждом из получающихся вариантов? Есть три места, на которых они стоят (например, $**\text{А}***\text{А}*\text{А}*$), то есть это тоже задача на перестановки без повторений, следовательно, повторов каждой расстановки букв ровно $P_3 = 3!$. Итого, всего существует $10!/3! = 604800$ способов переставить буквы в имени «АЛЕКСАНДРА».

Объединяя идеи, использованные в двух предыдущих задачах (про имена «ТАТЬЯНА» и «АЛЕКСАНДРА»), можно вывести общую формулу для задач на

Перестановки с повторениями. Пусть дано n_1 одинаковых объектов первого вида, n_2 – второго вида, и т.д., и их все надо расставить в определенной последовательности. Это можно сделать

$$P(n_1, n_2, \dots) = \frac{(n_1 + n_2 + \cdots)!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots}$$

различными способами.

Нетрудно заметить, что перестановки без повторений есть ни что иное, как частный случай перестановок с повторениями:

$$P_n = P(\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{n \text{ раз}}).$$

Задачи для самостоятельного решения.

Сколькими способами можно переставить буквы в словах
А) «ВЕКТОР»;
Б) «ЛИНИЯ»;
В) «ПАРАБОЛА»;
Г) «БИССЕКТРИСА»?

Сколькими способами можно расставить на первой горизонтали шахматной доски комплект белых фигур (король, ферзь, два слона, два коня и две ладьи)?

Задачи на перестановки можно обобщить еще больше, сделав количество «мест» произвольным (то есть, необязательно равным количеству расставляемых объектов).

В футбольной команде (11 человек) нужно выбрать капитана и его заместителя. Сколькими способами это можно сделать?

Капитана можно выбрать 11 способами (любой член команды может им стать), а его заместителя – только 10 способами (так как один человек уже стал капитаном). Итого $11 \cdot 10 = 110$ способов.

Почему не надо учитывать повторы?

То есть в этой задаче есть 11 различных объектов, из которых надо **выбрать** два. Такие задачи называют задачами на

Размещения без повторений. Пусть дано n различных объектов, некоторые из которых надо расставить на m мест, при этом каждый объект можно использовать только один раз. Это можно сделать

$$A_n^m = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-m+1)$$

различными способами.

Возможно, неочевидно, почему последний множитель равен именно $n-m+1$. Для доказательства этого достаточно представить формулу в следующем виде:

$$A_n^m = (n-0) \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots,$$

а поскольку множителей столько же, сколько и мест, то последний множитель (то есть количество объектов для места с номером m) будет равен

$$n-(m-1) = n-m+1.$$

Формулу для размещений без повторений можно записать и короче. Действительно,

$$A_n^m = n \cdot \ldots \cdot (n-m+1) = n \cdot \ldots \cdot (n-m+1) \times \frac{(n-m) \cdot (n-m-1) \cdot \ldots \cdot 1}{(n-m) \cdot (n-m-1) \cdot \ldots \cdot 1} =$$

$$= \frac{n \cdot \ldots \cdot 1}{(n-m) \cdot \ldots \cdot 1} = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Итак,

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Разумеется, количество мест не может быть больше количества объектов, то есть

$$n \geq m.$$

Буква A взята от слова «arrangement» – «расположение», «размещение» в переводе с английского.

Хотя примеры задач на **размещения с повторениями** уже попадались ранее, полезно рассмотреть еще один.

Назовем натуральное число «симпатичным», если в его записи встречаются только нечетные цифры. Сколько существует 4-значных «симпатичных» чисел?

Всего существует 5 нечетных цифр (1, 3, 5, 7 и 9), каждая из которых может стоять в любом разряде «симпатичного» числа. Раз разрядов всего три, то таких чисел существует $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^4 = 625$ штук.

А какие именно из ранее рассмотренных задач можно отнести к этому классу?

Итак, в общем виде задачи на размещения с повторениями формулируются так.

Размещения с повторениями. Пусть дано n различных объектов, некоторые из которых надо расставить на m мест, при этом каждый объект можно использовать неограниченное количество раз. Это можно сделать

$$\bar{A}_n^m = \underbrace{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{m \text{ раз}} = n^m$$

различными способами.

Задачи для самостоятельного решения.

Сколькими способами можно сделать трехцветный флаг с горизонтальными полосами одинаковой ширины, если имеется материя 6 различных цветов?

Сколько существует 6-значных чисел, цифры которых имеют одинаковую четность?

Сколько шестизначных чисел можно составить из цифр от 1 до 9, если каждое число должно состоять из трех четных и трех нечетных цифр, причем никакие две цифры в нем не повторяются?

Осталось рассмотреть последний стандартный класс задач.

В стране 20 городов, каждые два из которых соединены авиалинией. Сколько авиалиний в этой стране?

Если переформулировать вопрос этой задачи следующим образом: «Сколькими способами можно выбрать авиалинию?», то сразу становится понятно, как ее решать.
Чтобы выбрать авиалинию, нужно выбрать два города (отправления и назначения), то есть $A_{20}^2 = 20 \cdot 19 = 380$ способов. Однако отличие этой задачи от размещений в том, что если поменять местами города, авиалиния останется прежней, а значит, каждая авиалиния была посчитана дважды.
Итого, в стране $20 \cdot 19 : 2 = 190$ авиалиний.

Подобные задачи (в которых присутствует глагол «выбрать» или его синонимы) относят к **задачам на сочетания**.

Сочетания без повторений. Пусть дано n различных объектов, среди которых надо выбрать группу из m объектов. Это можно сделать

$$C_n^m = \frac{n!}{m! \cdot (n-m)!}$$

различными способами.

Сочетания отличаются от размещений тем, что в задачах на сочетания **не важно, в каком порядке** выбираются объекты.

Формулу для вычисления количества сочетаний без повторений необходимо доказать. В количестве размещений без повторений A_n^m каждая группа из m объектов посчитана более одного раза. Количество повторов, очевидно, равно количеству способов переставить местами выбранные объекты, то есть P_m. Таким образом,

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{\frac{n!}{(n-m)!}}{m!} = \frac{n!}{m! \cdot (n-m)!}.$$

Число C_n^k называется *биномиальным коэффициентом*. Это название пошло от так называемого бинома Ньютона, о котором вы узнаете позднее.

Буква C взята от слова «combination» – «комбинация», «сочетание» в переводе с английского.

На этом данный конспект подошел к концу. Ниже несколько задач напоследок.

В алфавите племени Бум-Бум шесть букв. Словом является любая последовательность из 6 букв, в которой есть хотя бы две одинаковые. Сколько слов в языке племени Бум-Бум?

Павел Дмитриевич решил попробовать себя в качестве предсказателя и спрогнозировать итог 13 футбольных матчей. Сколько существует вариантов прогнозов?

Сколькими способами из полной колоды в 52 карты можно выбрать четыре карты различных мастей и достоинств?

Сколько способов выбрать четыре пары из 100 человек?

Сколько существует десятизначных чисел, в которых нет повторяющихся цифр, а цифры $0, 1, 2, 3$ стоят подряд в порядке возрастания или убывания (и никак иначе)?

Сколько существует девятизначных чисел, сумма цифр которых четна?

Сколько способов поставить на шахматной доске:

А) 10 ладей десяти разных цветов;

Б) 10 черных ладей;

В) n черных ладей, в том числе 0 и 64?

В пункте В подразумевается общее количество способов для всех значений n.

Лестница состоит из 7 ступенек, не считая верхней и нижней площадок. Спускаясь, можно перепрыгивать через некоторые ступеньки (можно даже через все 7). Сколькими способами можно спуститься по этой лестнице?

Post Scriptum.

В конспекте было описано 5 стандартных классов комбинаторных задач, но на самом деле их шесть – есть еще **сочетания с повторениями**. Но о них в другой раз…