

ЦОД ФТШ, 6 класс, 2020-21: Наконец-то не надо писать (?)

1. Петя пишет поэму. В первый день он написал первые несколько строк, а в каждый следующий день дописывал на одну строку больше, чем дописал в предыдущий день (например, если в первый день он придумал 3 строки, то в конце второго дня поэма содержала 7 строк, а в конце третьего – 12).

- А) Может ли в конце какого-то дня (не первого) количество строк в поэме оканчиваться цифрой 4?
- Б) Может ли в конце какого-то дня (не первого) количество строк в поэме оканчиваться цифрой 4, а в конце какого-то из следующих дней – цифрой 7?

2. На одном острове живут четыре типа людей: рыцари (не могут произносить ложных утверждений), лжецы (не могут произносить истинных утверждений), обычные люди (могут говорить всё что угодно) и бояки (не делают вообще никаких утверждений). Однажды собрались несколько человек, и каждый из них произнёс одну из следующих фраз: «Кто вы?», «Я рыцарь», «Я лжец», «Я обычный», «Я бояка». Каждую из пяти фраз произнесли ровно по 10 человек. Могут ли рыцари оказаться самым многочисленным типом людей в этой компании?

3. Даны три сосуда. Первый сосуд наполнен водой, а второй и третий пусты. В 12:00 из первого сосуда начинает литься вода во второй и третий, причём во второй поступает 2 литра в минуту, а в третий – 4 литра в минуту. В 13:00 объём воды в первом и втором сосудах сравнялся. Во сколько первый сосуд опустеет?

4. В магазине есть три сорта чая: зелёный, чёрный и фруктовый. Вначале количество пачек разных сортов относилось как $4 : 5 : 8$. После недели продаж и новой поставки это соотношение изменилось и стало $5 : 7 : 12$. Известно, что число пачек фруктового чая возросло на 60%, а зелёного увеличилось не более чем на 20 пачек. Сколько всего пачек чая было в магазине вначале?

5. У Гарри Поттера есть коробка размерами $10 \times 10 \times 10$ сантиметров и волшебный аппарат. Если поместить коробку в аппарат, то одно из её измерений (длина, ширина или высота) увеличивается на 50%, а каждое из двух других уменьшается на 20%. Может ли у Гарри после нескольких применений аппарата получиться коробка $20 \times 20 \times 20$ сантиметров?

6. Двое играют в игру. Первый игрок пишет на пустой доске произвольное натуральное число, не кратное 10. Дальше игроки по очереди (начиная со второго) пишут на доске какую-нибудь степень любого из чисел, написанного на доске. (Например, если на доске написаны числа 3 и 81, то можно написать любое из чисел $3 = 3^1$, $9 = 3^2$, $27 = 3^3$, $81 = 3^4$, $243 = 3^5$ и так далее, а также $81 = 81^1$, $6561 = 81^2$ и так далее) Выигрывает тот из игроков, после хода которого сумма каких-нибудь чисел, написанных на доске, делится на 10. У кого из игроков есть способ выиграть при любой игре соперника? Как он должен действовать?

7. Квадрат со стороной 12 см разрезали на три прямоугольника одинакового периметра. Чему может быть равен этот периметр?

8. Сколькими способами можно разместить в квадрате 3×3 числа от 1 до 9 (каждое по одному разу) так, чтобы число в каждой угловой клетке было хотя бы на 4 больше, чем каждое из его соседей? Числа называются соседями, если у клеток, в которых они стоят, есть общая сторона. Способы, переводимые друг в друга симметрией или поворотом, считаются разными.

9. Найдутся ли три натуральных числа, больших 1, произведение которых равно
$$500000080000003?$$

10. Перемножили несколько однозначных чисел, среди которых нет ни двоек, ни пятёрок. Могло ли получиться число, записанное только двойками и пятёрками?

11. Три коллекционера картин A , B и C выставили часть своих картин на аукцион. A выставил 3% своих картин, B – 7%, C – 20%. B купил все картины, выставленные A , C – выставленные B , A – выставленные C . Какое наименьшее (ненулевое) количество картин могло быть выставлено на аукцион, если количество картин у каждого коллекционера не изменилось?

12. Сто баранов бегут в ряд на расстоянии 6 метров друг от друга со скоростью 5 км/ч. Навстречу им со скоростью 1 км/ч идёт пастух, который при встрече с бараном мгновенно разворачивает его в противоположном направлении, и тот продолжает бежать с прежней скоростью. Найдите расстояние между баранами при их обратном движении.