

Домашнее задание:

1. Решите уравнение  $4\sin 3x + 3\cos 4x = 7$
2. Найдите все интервалы вида  $(k; k+1)$ , где  $k$  – целое число, содержащее нули функции  $f(x) = ((x^3 - 1) - 1)^3 - 1$
3. Найдите все значение параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение  $\sin^{14} x + (a - 3\sin x)^7 + \sin^2 x + a = 3\sin x$  имеет хотя бы один корень.
4. В течение одной рабочей недели цена на нефть менялась каждый день на одно и то же число процентов  $a$  ( $1 \leq a \leq 50$ ) по сравнению с предыдущей ценой, причем в понедельник и среду она уменьшалась, а во вторник, четверг и пятницу — увеличивалась. Могла ли к субботе цена на нефть увеличиться на 11% по сравнению с первоначальной ценой?

Решение домашнего задания:

Решите уравнение  $4\sin 3x + 3\cos 4x = 7$

$$\begin{aligned} \sin 3x \leq 1 \\ \cos 4x \leq 1 \end{aligned} \quad \begin{cases} \sin 3x = 1 \\ \cos 4x = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \\ 4x = 2\pi k \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}, n \in Z \\ x = \frac{\pi k}{2}, k \in Z \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3} = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi(3t-1)}{3} = \\ = \frac{\pi}{6} - \frac{2\pi}{3} + 2\pi t = -\frac{\pi}{2} + 2\pi t, t \in Z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3} = \frac{\pi k}{2} \\ 1 + 4n = 3k \\ k = \frac{1+4n}{3} = n + \frac{1+n}{3} \\ 1+n = 3t, t \in Z \\ n = 3t-1 \\ k = \frac{1+4n}{3} = 4t-1 \end{aligned}$$

Ответ:  $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi t, t \in Z$

Найдите все интервалы вида  $(k; k+1)$ , где  $k$  – целое число, содержащее нули функции

$$f(x) = ((x^3 - 1) - 1)^3 - 1$$

Рассмотрим функцию  $g(x) = x^3 - 1$  — строго возрастающая на всей числовой оси.

Функция  $f(x) = g(g(g(x)))$  — строго возрастающая на всей числовой оси.

Следовательно уравнение  $f(x) = 0$  может иметь только одно решение.

Заметим, что  $f(1) = ((1-1)^3 - 1)^3 - 1 = -2 < 0$ ;  $f(2) = ((8-1)^3 - 1)^3 - 1 > 0$

Ответ: интервал существует только один — (1; 2).

Найдите все значение параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение  $\sin^{14} x + (a - 3 \sin x)^7 + \sin^2 x + a = 3 \sin x$  имеет хотя бы один корень.

$$f(\sin^2 x) = f(3 \sin x - a) \quad \bullet \quad (\sin^2 x)^7 + \sin^2 x = (3 \sin x - a)^7 + 3 \sin x - a$$

$$\sin^2 x = 3 \sin x - a \quad f(t) = t^7 + t$$

$$\sin x = z, -1 \leq z \leq 1 \quad \bullet \quad \text{В силу монотонного возрастания функции } f(t)$$

$$z^2 - 3z + a = 0 \quad f(t_1) = f(t_2) \Leftrightarrow t_1 = t_2$$

$$D = 9 - 4 \cdot a \geq 0 \quad t_1 = (\sin^2 x); t_2 = (3 \sin x - a)$$

$$a \leq \frac{9}{4}$$

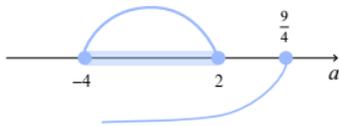
$$-1 \leq z \leq 1 \quad -1 \leq \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4a}}{2} \leq 1 \quad 1 \leq \sqrt{9 - 4a} \leq 5$$

$$z^2 - 3z + a = 0 \quad -2 \leq 3 \pm \sqrt{9 - 4a} \leq 2 \quad 1 \leq 9 - 4a \leq 25$$

$$D = 9 - 4 \cdot a \geq 0 \quad -5 \leq \pm \sqrt{9 - 4a} \leq -1 \quad -8 \leq -4a \leq 16$$

$$a \leq \frac{9}{4} \quad -5 \leq -\sqrt{9 - 4a} \leq -1 \quad -2 \leq -a \leq 4$$

$$-4 \leq a \leq 2$$



Ответ:  $a \in [-4; 2]$

В течение одной рабочей недели цена на нефть менялась каждый день на одно и то же число процентов  $a$  ( $1 \leq a \leq 50$ ) по сравнению с предыдущей ценой, причем в понедельник и среду она уменьшалась, а во вторник, четверг и пятницу — увеличивалась. Могла ли к субботе цена на нефть увеличиться на 11% по сравнению с первоначальной ценой?

Пусть  $A$  — исходная цена на нефть (до колебаний).  
Введем обозначение:

$$x = \frac{a}{100}; \frac{1}{100} \leq x \leq \frac{1}{2}$$

Тогда к субботе цена на нефть составит:  $A \cdot (1-x)^2 \cdot (1+x)^3$

$$(A \cdot (1-x)^2 \cdot (1+x)^3 = ? = 1,11 \cdot A)$$

$$((1-x)^2 \cdot (1+x)^3 = 1,11)?$$

Рассмотрим функцию  $f(x) = (1-x)^2 \cdot (1+x)^3 = (1-x^2)^2 (1+x)$

Найдем множество значений функции при:  $\frac{1}{100} \leq x \leq \frac{1}{2}$

Возьмем производную функции:

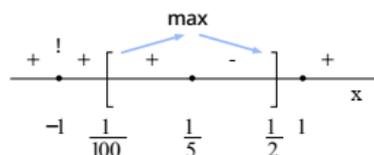
$$f'(x) = ((x^2 - 1)^2 (x + 1))' =$$

$$= 2(x^2 - 1) \cdot 2x \cdot (x + 1) + (x^2 - 1)^2 =$$

$$= (x^2 - 1)(4x^2 + 4x + x^2 - 1) =$$

$$= (x^2 - 1)(5x^2 + 4x - 1) = 0$$

$$f\left(\frac{1}{5}\right) = \left(\left(\frac{1}{5}\right)^2 - 1\right)^2 \left(\frac{1}{5} + 1\right) = 1,10592$$



$$f(x) < 1,11$$

Ответ:  
не могла увеличиться на 11%