

### ***Замечательные точки и линии треугольника.***

---

*К числу замечательных точек, изучаемых в школьном курсе геометрии, относятся:*

*а) точка пересечения биссектрис (центр вписанной окружности);*

*б) точка пересечения серединных перпендикуляров (центр описанной окружности);*

*в) точка пересечения высот (ортоцентр);*

*г) точка пересечения медиан (центроид).*

---

Добавим к ним некоторые другие замечательные точки и линии и напомним различные способы решения геометрических задач.

---

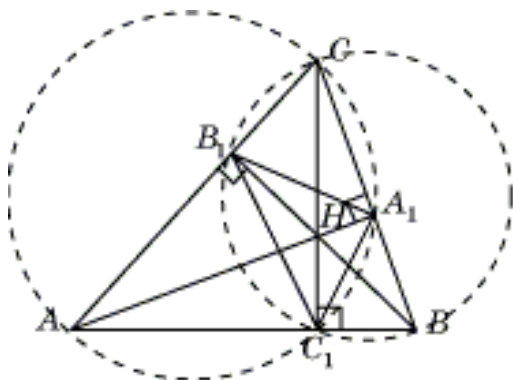
*Ортотреугольник — это треугольник, вершинами которого служат основания высот данного треугольника.*

---

*Задача 1.*

Пусть в остроугольном треугольнике  $ABC$  точки  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  обозначают основания высот. Докажите, что точка  $H$  пересечения высот треугольника  $ABC$  является точкой пересечения биссектрис треугольника  $A_1B_1C_1$ .

*Доказательство:*



*(Метод вспомогательной окружности)*

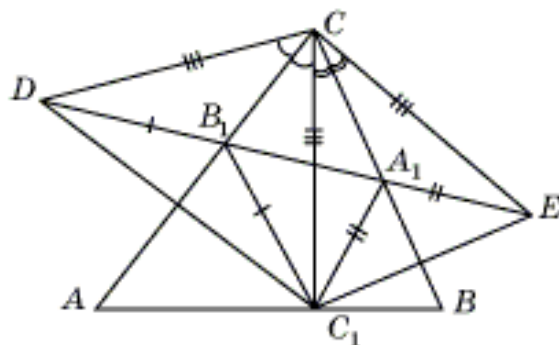
На сторонах  $AC$  и  $BC$  треугольника  $ABC$ , как на диаметрах, построим окружности. Точки  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  принадлежат этим окружностям. Поэтому  $\angle B_1C_1C = \angle B_1BC$ , как углы, опирающиеся на одну и ту же дугу окружности.  $\angle B_1BC = \angle CAA_1$ , как углы с взаимно перпендикулярными сторонами.  $\angle CAA_1 = \angle CC_1A_1$ , как углы, опирающиеся на одну и ту же дугу окружности. Следовательно,  $\angle B_1C_1C = \angle CC_1A_1$ , т.е.  $CC_1$  является биссектрисой угла  $B_1C_1A_1$ . Аналогичным образом показывается, что  $AA_1$  и  $BB_1$  являются биссектрисами углов  $B_1A_1C_1$  и  $A_1B_1C_1$ .

Самостоятельно исследуйте случаи прямоугольного и тупоугольного треугольника.

Рассмотренный треугольник, вершинами которого являются основания высот данного остроугольного треугольника, дает ответ на одну из классических экстремальных задач.

**Задача 2 (задача Фаньяно).** В данный остроугольный треугольник вписать треугольник наименьшего периметра.

*Решение:*



**(Применение симметрии)**

Пусть  $ABC$  – данный остроугольный треугольник. На его сторонах требуется найти такие точки  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$ , для которых периметр треугольника  $A_1B_1C_1$  был бы наименьшим.

Зафиксируем сначала точку  $C_1$  и будем искать точки  $A_1$  и  $B_1$ , для которых периметр треугольника  $A_1B_1C_1$  наименьший (при данном положении точки  $C_1$ ).

Для этого рассмотрим точки  $D$  и  $E$  симметричные точке  $C_1$  относительно прямых  $AC$  и  $BC$ . Тогда  $B_1C_1 = B_1D$ ,  $A_1C_1 = A_1E$  и, следовательно, периметр треугольника  $A_1B_1C_1$  будет равен длине ломаной  $DB_1A_1E$ . Ясно, что длина этой ломаной наименьшая, если точки  $B_1$ ,  $A_1$  лежат на прямой  $DE$ .

Будем теперь менять положение точки  $C_1$ , и искать такое положение, при котором периметр соответствующего треугольника  $A_1B_1C_1$  наименьший.

Так как точка  $D$  симметрична  $C_1$  относительно  $AC$ , то  $CD = CC_1$  и  $\angle ACD = \angle ACC_1$ . Аналогично,  $CE = CC_1$  и  $\angle BCE = \angle BCC_1$ . Следовательно, треугольник  $CDE$  равнобедренный. Его боковая сторона равна  $CC_1$ . Основание  $DE$  равно периметру  $p$  треугольника  $A_1B_1C_1$ . Угол  $DCE$  равен удвоенному углу  $ACB$  треугольника  $ABC$  и, значит, не зависит от положения точки  $C_1$ .

В равнобедренном треугольнике с данным углом при вершине основание тем меньше, чем меньше боковая сторона. Поэтому наименьшее значение периметра  $p$  достигается в случае наименьшего значения  $CC_1$ . Это значение принимается в случае, если  $CC_1$  является высотой треугольника  $ABC$ . Таким образом, искомой точкой  $C_1$  на стороне  $AB$  является основание высоты, проведенной из вершины  $C$ .

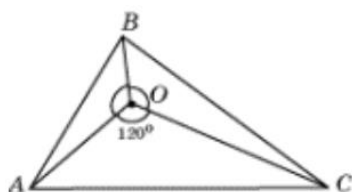
Заметим, что мы могли бы фиксировать сначала не точку  $C_1$ , а точку  $A_1$  или точку  $B_1$  и получили бы, что  $A_1$  и  $B_1$  являются основаниями соответствующих высот треугольника  $ABC$ .

Из этого следует, что искомым треугольником, наименьшего периметра, вписанным в данный остроугольный треугольник  $ABC$  является треугольник, вершинами которого служат основания высот треугольника  $ABC$ .

---

Пусть дан треугольник  $ABC$ . Точкой Торричелли этого треугольника называется такая точка  $O$ , из которой стороны данного треугольника видны под углом  $120^\circ$ , т.е. углы  $AOB$ ,  $AOC$  и  $BOC$  равны  $120^\circ$ .

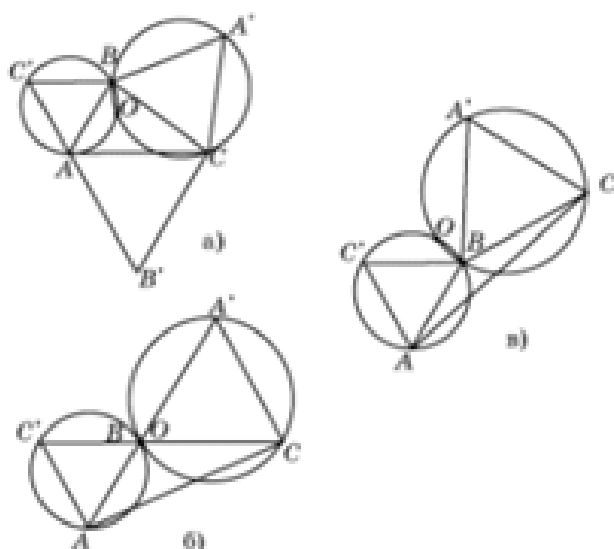
---



**Задача 3.** Докажем, что в случае, если все углы треугольника меньше  $120^\circ$ , то точка Торричелли существует.

*Доказательство:*

**(Вспомогательный треугольник и вспомогательная окружность.)**



Докажем, что в случае, если все углы треугольника меньше  $120^\circ$ , то точка Торричелли существует.

На стороне  $AB$  треугольника  $ABC$  построим равносторонний треугольник  $ABC'$  (рис. а), и опишем около него окружность. Отрезок  $AB$  стягивает дугу этой окружности величиной  $120^\circ$ . Следовательно, точки этой дуги, отличные от  $A$  и  $B$ , обладают тем свойством, что отрезок  $AB$  виден из них под углом  $120^\circ$ . Аналогичным образом, на стороне  $AC$  треугольника  $ABC$  построим равносторонний треугольник  $ACB'$  (рис. а), и опишем около него окружность. Точки соответствующей дуги, отличные от  $A$  и  $C$ , обладают тем свойством, что отрезок  $AC$  виден из них под углом  $120^\circ$ . В случае, когда углы треугольника меньше  $120^\circ$ , эти дуги пересекаются в некоторой внутренней точке  $O$ . В этом случае  $\angle AOB = 120^\circ$ ,  $\angle AOC = 120^\circ$ . Следовательно, и  $\angle BOC = 120^\circ$ . Поэтому точка  $O$  является искомой.

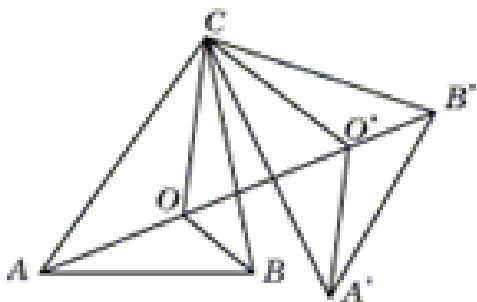
В случае, когда один из углов треугольника, например  $ABC$ , равен  $120^\circ$ , точкой пересечения дуг окружностей будет точка  $B$  (рис. б). В этом случае точки Торричелли не существует, так как нельзя говорить об углах, под которыми видны из этой точки стороны  $AB$  и  $BC$ .

В случае, когда один из углов треугольника, например  $ABC$ , больше  $120^\circ$  (рис. в), соответствующие дуги окружностей не пересекаются, и точки Торричелли также не существует.

С точкой Торричелли связана задача Ферма о нахождении точки, сумма расстояний от которой до трех данных точек наименьшая.

**Задача 4 (задача Ферма).** Для данного треугольника найдите точку, сумма расстояний от которой до вершин треугольника принимает наименьшее значение.

*Решение:*



**(Применение поворота).**

Докажем, что в случае, если углы треугольника меньше  $120^\circ$ , то искомой точкой является точка Торричелли.

Повернем треугольник  $ABC$  вокруг вершины  $C$  на угол  $60^\circ$ . Получим треугольник  $A'B'C$ . Возьмем произвольную точку  $O$  в треугольнике  $ABC$ . При повороте она перейдет в какую-то точку  $O'$ . Треугольник  $OO'C$  равносторонний, так как  $CO = CO'$  и  $\angle OCO' = 60^\circ$ , следовательно,  $OC = OO'$ . Поэтому сумма длин  $OA + OB + OC$  будет равна длине ломаной  $AO + OO' + O'B'$ . Ясно, что наименьшее значение длины этой ломаной принимает в случае, если точки  $A, O, O', B'$  лежат на одной прямой. Если  $O$  – точка Торричелли, то это так. Действительно,  $\angle AOC = 120^\circ$ ,  $\angle COO' = 60^\circ$ . Следовательно, точки  $A, O, O'$  лежат на одной прямой. Аналогично,  $\angle CO'O = 60^\circ$ ,  $\angle CO'B' = 120^\circ$ . Следовательно, точки  $O, O', B'$  лежат на одной прямой. Значит, все точки  $A, O, O', B'$  лежат на одной прямой.

Самостоятельно докажите, что в случае, если один из углов треугольника больше или равен  $120^\circ$ , то решением задачи Ферма является вершина этого угла.

---

*(Четыре точки на окружности).*

Три точки, не лежащие на одной прямой, всегда лежат на одной окружности (так как около любого треугольника можно описать окружность). А вот четыре точки в общем положении уже не обязаны располагаться на одной окружности. Если в сложной геометрической задаче удаётся установить, что какие-то четыре точки лежат на одной окружности, то это зачастую оказывается существенным продвижением к решению. Поэтому нужно свободно владеть свойствами и признаками расположения четырёх точек на окружности.

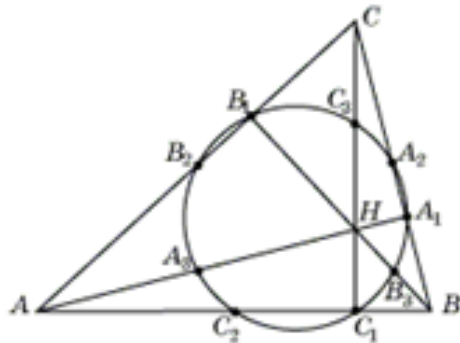
Рассмотрим четырёхугольник  $ABCD$ . Для того, чтобы его вершины были расположены на одной окружности, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из следующих равенств:

- (1)  $\angle ABD = \angle ACD$ ;
- (2)  $\angle A + \angle C = 180^\circ$ ;
- (3)  $KA \cdot KC = KB \cdot KD$ ;
- (4)  $MA \cdot MB = MD \cdot MC$

Где  $K$  – точка пересечения диагоналей,  $M$  – точка пересечения прямых  $AB$  и  $CD$ .

---

*Задача 5 (Окружность девяти точек).* Пусть в треугольнике  $ABC$ ,  $H$  – точка пересечения высот треугольника; точки  $A_1, B_1, C_1$  обозначают основания высот;  $A_2, B_2, C_2$  – середины соответствующих сторон;  $A_3, B_3, C_3$  – середины отрезков  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$ . Тогда точки  $A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2, A_3, B_3, C_3$  лежат на одной окружности, называемой *окружностью девяти точек* или *окружностью Эйлера*.

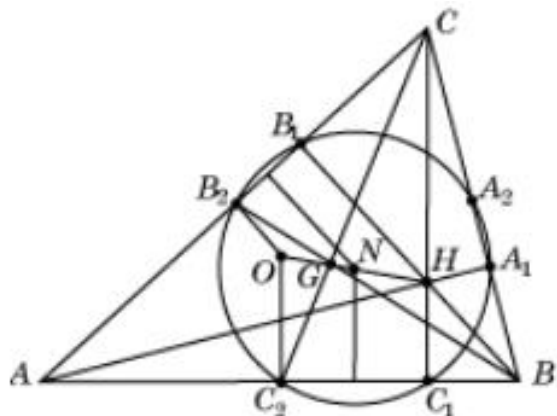


*(Четыре точки на окружности).*

*Решение:*

Действительно,  $A_3B_2$  – средняя линия треугольника  $AHC$  и, следовательно,  $A_3B_2 \parallel CC_1$ .  $B_2A_2$  – средняя линия треугольника  $ABC$  и, следовательно,  $B_2A_2 \parallel AB$ . Так как  $CC_1 \perp AB$ , то  $\angle A_3B_2A_2 = 90^\circ$ . Аналогично,  $\angle A_3C_2A_2 = 90^\circ$ . Поэтому точки  $A_2, B_2, C_2, A_3$  лежат на одной окружности с диаметром  $A_2A_3$ . Так как  $AA_1 \perp BC$ , то точка  $A_1$  также принадлежит этой окружности. Таким образом, точки  $A_1$  и  $A_3$  лежат на окружности, описанной около треугольника  $A_2B_2C_2$ . Аналогичным образом показывается, что точки  $B_1$  и  $B_3, C_1$  и  $C_3$  лежат на этой окружности. Значит, все девять точек лежат на одной окружности.

**Задача 6 (Прямая Эйлера).** В треугольнике центр описанной окружности, точка пересечения медиан, точка пересечения высот и центр окружности девяти точек лежат на одной прямой, называемой прямой Эйлера. При этом центр окружности девяти точек лежит посередине между центром пересечения высот и центром описанной окружности.



(Применение гомотетии).

*Доказательство:*

Действительно, пусть в треугольнике  $ABC$  точка  $O$  – центр описанной окружности;  $G$  – точка пересечения медиан.  $H$  – точка пересечения высот. Требуется доказать, что точки  $O, G, H$  лежат на одной прямой и центр окружности девяти точек  $N$  делит отрезок  $OH$  пополам.

Рассмотрим гомотетию с центром в точке  $G$  и коэффициентом  $-0,5$ . Вершины  $A, B, C$  треугольника  $ABC$  перейдут, соответственно, в точки  $A_2, B_2, C_2$ . Высоты треугольника  $ABC$  перейдут в высоты треугольника  $A_2B_2C_2$  и, следовательно, точка  $H$  перейдет в точку  $O$ . Поэтому точки  $O, G, H$  будут лежать на одной прямой.

Покажем, что середина  $N$  отрезка  $OH$  является центром окружности девяти точек. Действительно,  $C_1C_2$  – хорда окружности девяти точек. Поэтому серединный перпендикуляр к этой хорде является диаметром и пересекает  $OH$  в середине  $N$ . Аналогично, серединный перпендикуляр к хорде  $B_1B_2$  является диаметром и пересекает  $OH$  в той же точке  $N$ . Значит  $N$  – центр окружности девяти точек. Что и требовалось доказать.



Рассмотрим теперь теоремы, позволяющие устанавливать, в каком случае три точки, лежащие на сторонах треугольника или их продолжениях, принадлежат одной прямой (теорема Менелая), а также, в каком случае три прямые, проходящие через вершины треугольника и противоположные им стороны треугольника, пересекаются в одной точке (теорема Чебы).

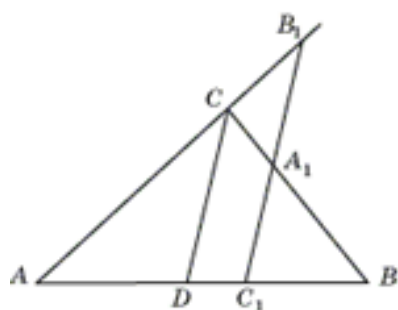
Начнем с теоремы Менелая, доказанной древнегреческим математиком и астрономом Менелаем Александрийским, жившим в I веке до нашей эры.

---

*Задача 7 (Теорема Менелая). Пусть на сторонах  $AB$ ,  $BC$  и продолжении стороны  $AC$  треугольника  $ABC$  взяты соответственно точки  $C_1$ ,  $A_1$  и  $B_1$ . Точки  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда выполняется равенство*

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$$


---



(Метод подобия).

*Доказательство:*

Предположим, что точки  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  принадлежат одной прямой  $a$

Через вершину  $C$  треугольника  $ABC$  проведем прямую, параллельную  $a$  и обозначим через  $D$  точку ее пересечения с  $AB$ . Из подобия треугольников  $ADC$  и  $AC_1B$  следует выполнимость равенства

$$(1) \quad \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{DC_1}{AC_1}.$$

Аналогично, из подобия треугольников  $BDC$  и  $BC_1A_1$  следует выполнимость равенства

$$(2) \quad \frac{BA_1}{A_1C} = \frac{BC_1}{C_1D}.$$

Перемножая эти равенства, получим равенство

$$\frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{BC_1}{AC_1},$$

из которого следует требуемое равенство (\*)

Докажем обратное. Пусть на сторонах  $AB$ ,  $BC$  и продолжении стороны  $AC$  треугольника  $ABC$  взяты соответственно точки  $C_1$ ,  $A_1$  и  $B_1$ , для которых выполняется равенство (\*). Предположим, что прямая  $A_1B_1$  пересекает прямую  $AB$  в некоторой точке  $C'$ . По доказанному, выполняется равенство

$$\frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1.$$

$$\frac{AC'}{C'B} = \frac{AC_1}{C_1B},$$

Учитывая равенство (\*), получаем равенство  $\frac{AC'}{C'B} = \frac{AC_1}{C_1B}$ , из которого следует совпадение точек  $C'$  и  $C_1$  и, значит, точки  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  принадлежат одной прямой.



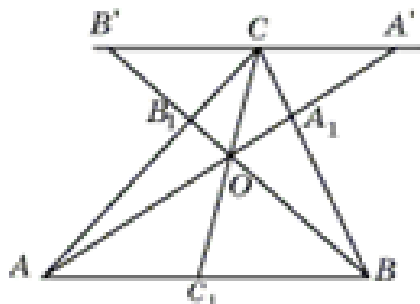
---

### Задача 8 (теорема Ван-Обеля)

Пусть на сторонах  $AB$ ,  $BC$  и  $AC$  треугольника  $ABC$  взяты соответственно точки  $C_1$ ,  $A_1$  и  $B_1$ . Если прямые  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$  пересекаются в точке  $O$ , то имеет место равенство

$$\frac{CO}{OC_1} = \frac{CA_1}{A_1B} + \frac{CB_1}{B_1A}.$$

---



(Метод подобия).

Доказательство:

Через вершину  $C$  треугольника  $ABC$  проведем прямую, параллельную  $AB$ . Продолжим  $AA_1$  и  $BB_1$  до пересечения с этой прямой в точках  $A'$  и  $B'$  соответственно. Из подобия треугольников  $AOB$  и  $A'OB'$  имеем

$$\frac{CO}{OC_1} = \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C + CB'}{AB} = \frac{A'C}{AB} + \frac{CB'}{AB}.$$

Из подобия треугольников  $A'CA_1$  и  $ABA_1$ ,  $CB'B_1$  и  $ABB_1$  имеем

$$\frac{A'C}{AB} = \frac{CA_1}{A_1B}, \quad \frac{CB'}{AB} = \frac{CB_1}{B_1A}.$$

Следовательно,  $\frac{CO}{OC_1} = \frac{CA_1}{A_1B} + \frac{CB_1}{B_1A}.$

Из доказанной теоремы непосредственно следует, что медианы треугольника точкой их пересечения делятся в отношении 2:1, считая от вершины.

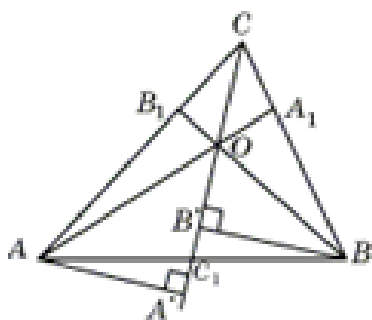
Рассмотрим теперь теорему, опубликованную в 1678 году итальянским математиком и инженером Джованни Чевай.

---

*Задача 9 (Теорема Чевы). Пусть на сторонах  $AB$ ,  $BC$  и  $AC$  треугольника  $ABC$  взяты соответственно точки  $C_1$ ,  $A_1$  и  $B_1$ . Прямые  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$  пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда  $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$*

---

*Доказательство:*



*(Метод площадей).*

Предположим, что прямые  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$  пересекаются в точке  $O$ . Опустим из вершин  $A$  и  $B$  треугольника  $ABC$  перпендикуляры  $AA'$ ,  $BB'$  на прямую  $CC_1$ . Треугольники  $AC_1A'$  и  $BC_1B'$  подобны и, следовательно,

$$\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{AA'}{BB'} = \frac{S_{AOC}}{S_{BOC}}.$$

Аналогичным образом показывается, что

$$\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{S_{BOA}}{S_{COA}} \text{ и } \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{S_{COB}}{S_{AOB}}.$$

Перемножая полученные равенства, будем иметь

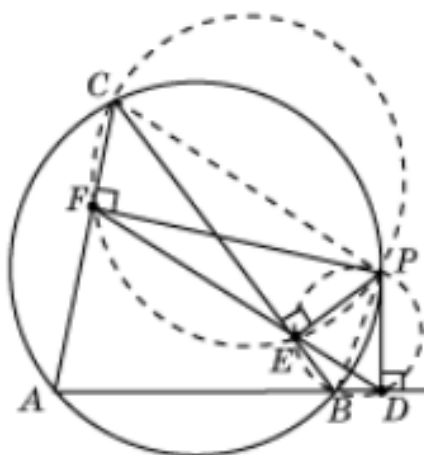
$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1.$$

Заметим, что из теоремы Чевы непосредственно следует, что медианы треугольника пересекаются в одной точке.

*Задачи для самостоятельного решения:*

1. (Метод вспомогательной окружности) Для произвольного треугольника основания перпендикуляров, опущенных из любой точки описанной около него окружности на его стороны или их продолжения, лежат на одной прямой, называемой прямой Симсона.
2. (Теорема Менелая). Используя теорему Менелая, доказать, что отрезки, соединяющие вершины тетраэдра с центроидами противоположных граней, пересекаются в одной точке, называемой центроидом тетраэдра, и делятся в ней в отношении 3:1, считая от вершин.
3. (Теорема Чевы). Докажите, что прямые, проходящие через вершины треугольника и точки касания вневписанных окружностей, пересекаются в одной точке (точке Нагеля). (Окружность называется вневписанной в треугольник, если она касается одной стороны этого треугольника и продолжений двух других его сторон.)

### Решения задач:

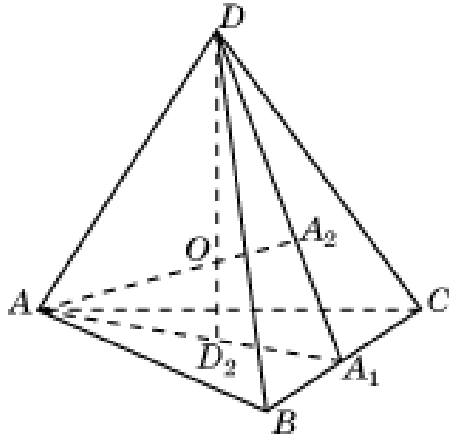


**Задача 1.** Для произвольного треугольника основания перпендикуляров, опущенных из любой точки описанной около него окружности на его стороны или их продолжения, лежат на одной прямой, называемой прямой Симсона.

Действительно, пусть  $P$  – произвольная точка, лежащая на окружности, описанной около треугольника  $ABC$ ;  $D, E, F$  – основания перпендикуляров, опущенных из точки  $P$  на стороны треугольника. Покажем, что точки  $D, E, F$  лежат на одной прямой.

Заметим, что в случае, если  $AP$  проходит через центр окружности, то точки  $D$  и  $E$  совпадают с вершинами  $B$  и  $C$ . В противном случае, один из углов  $ABP$  или  $ACP$  острый, а другой – тупой. Из этого следует, что точки  $D$  и  $E$  будут расположены по разные стороны от прямой  $BC$  и для того, чтобы доказать, что точки  $D, E$  и  $F$  лежат на одной прямой, достаточно проверить, что  $\angle CEF = \angle BED$ .

Опишем окружность с диаметром  $CP$ . Так как  $\angle CFP = \angle CEP = 90^\circ$ , то точки  $E$  и  $F$  лежат на этой окружности. Поэтому  $\angle CEF = \angle CPF$  как вписанные углы, опирающиеся на одну дугу окружности. Далее,  $\angle CPF = 90^\circ - \angle PCF = 90^\circ - \angle DBP = \angle BPD$ . Опишем окружность с диаметром  $BP$ . Так как  $\angle BEP = \angle BDP = 90^\circ$ , то точки  $F$  и  $D$  лежат на этой окружности. Поэтому  $\angle BPD = \angle BED$ . Следовательно, окончательно получаем, что  $\angle CEF = \angle BED$ . Значит точки  $D, E, F$  лежат на одной прямой.



**Задача 2.** Используя теорему Менелая, доказать, что отрезки, соединяющие вершины тетраэдра с центроидами противоположных граней, пересекаются в одной точке, называемой центроидом тетраэдра, и делятся в ней в отношении 3:1, считая от вершин.

*Доказательство:*

Действительно, пусть  $ABCD$  – тетраэдр,  $A_2$ ,  $D_2$  – центроиды соответствующих граней,  $A_1$  – середина  $BC$ ,  $O$  – точка пересечения  $AA_2$  и  $DD_2$  (рис. 13). Применим теорему Менелая к треугольнику  $A_1DD_2$  и прямой  $AA_2$ . Имеем

$$\frac{A_1A_2}{A_2D} \cdot \frac{DO}{OD_2} \cdot \frac{D_2A}{AA_1} = 1.$$

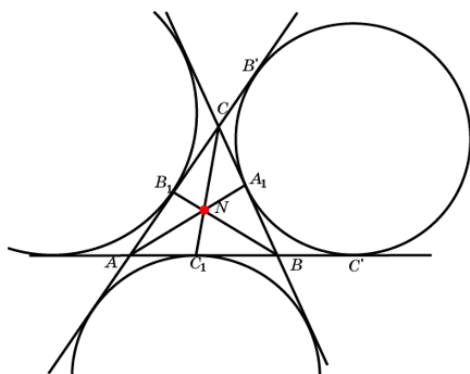
Так как  $A_2$  – точка пересечения медиан треугольника  $BCD$ , то  $\frac{A_1A_2}{A_2D} = \frac{1}{2}$ . Так как  $D_2$  – точка пересечения медиан треугольника  $ABC$ , то  $\frac{D_2A}{AA_1} = \frac{2}{3}$ . Поэтому  $\frac{DO}{OD_2} = \frac{3}{1}$ .

Заметим, что в таком же отношении делят отрезок  $DD_2$  прямые  $BB_2$  и  $CC_2$ . Следовательно, они также проходят через точку  $O$  и делятся в ней в отношении 3:1, считая от вершин.

**Задача 3** (Теорема Чевы). Докажите, что прямые, проходящие через вершины треугольника и точки касания вневписанных окружностей, пересекаются в одной точке (точке Нагеля). (Окружность называется вневписанной в треугольник, если она касается одной стороны этого треугольника и продолжений двух других его сторон.)

*Доказательство:*

Пусть окружность касается стороны  $BC$  и продолжения сторон  $AC$  и  $AB$  треугольника  $ABC$  соответственно в точках  $A_1, B', C'$ . Тогда  $CA_1 = CB'$ ,  $BA_1 = BA'$ ,  $AB' = AC'$ . Обозначим  $AB = c$ ,  $AC = b$ ,  $BC = a$ ,  $p$  – полупериметр треугольника  $ABC$ . Имеем  $AB' = AC' = p$  и, следовательно,  $BA_1 = BC' = p - c$ ,  $A_1C = CB' = p - b$ .



Аналогично, для точек касания  $B_1$  и  $C_1$  имеем:  $AC_1 = p - b$ ,  $C_1B = p - a$ ;  $CB_1 = p - a$ ,  $C_1A = p - b$ . Следовательно, выполняется равенство

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1.$$

По теореме Чевы, прямые  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$  пересекаются в одной точке.

*Домашнее задание:*

1. На медиане  $CC_1$  треугольника  $ABC$  взята точка  $M$ . Прямые  $AM$  и  $BM$  пересекают стороны треугольника соответственно в точках  $A_1$  и  $B_1$ . Докажите, что прямые  $AB$  и  $A_1B_1$  параллельны.
2. Отрезок  $MN$ , соединяющий середины сторон  $AD$  и  $BC$  четырехугольника  $ABCD$ , делится диагоналями на три равные части. Докажите, что  $ABCD$  – трапеция, одно из оснований  $AB$  или  $CD$  которой вдвое больше другого.