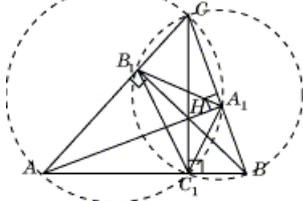
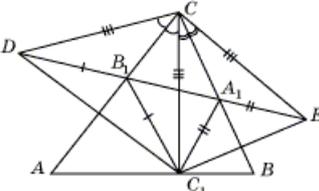
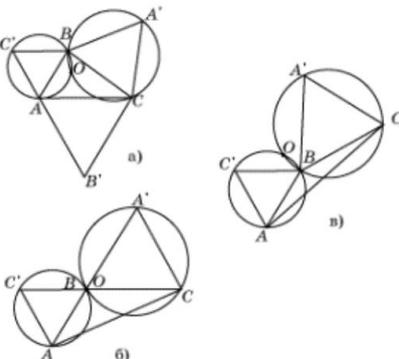
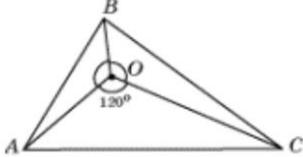
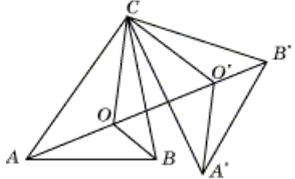
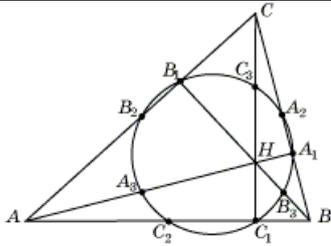
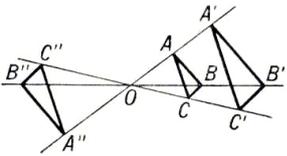
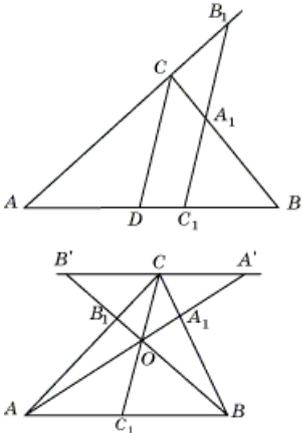
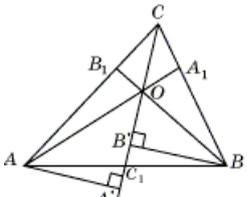


Замечательные точки и линии треугольника.

К числу таких точек, изучаемых в школьном курсе геометрии, относятся: а) точка пересечения биссектрис (центр вписанной окружности); б) точка пересечения серединных перпендикуляров (центр описанной окружности); в) точка пересечения высот (ортоцентр); г) точка пересечения медиан (центроид).

Добавим к ним некоторые другие замечательные точки и линии и напомним различные способы решения геометрических задач.

<p>Метод вспомогательной окружности.</p> 	<p>Пусть в остроугольном треугольнике ABC точки A_1, B_1, C_1 обозначают основания высот. Докажите, что точка H пересечения высот треугольника ABC является точкой пересечения биссектрис треугольника $A_1B_1C_1$.</p> <p><i>Ортотреугольник</i> — это треугольник, вершинами которого служат основания высот данного треугольника.</p>
<p>Применение симметрии.</p> 	<p>(задача <i>Фаньяно</i>). В данный остроугольный треугольник вписать треугольник наименьшего периметра.</p>
<p>Вспомогательный треугольник.</p> 	<p>Пусть дан треугольник ABC. Точкой <i>Торричелли</i> этого треугольника называется такая точка O, из которой стороны данного треугольника видны под углом 120°, т.е. углы AOB, AOC и BOC равны 120°.</p>  <p>Докажем, что в случае, если все углы треугольника меньше 120°, то точка Торричелли существует.</p>
<p>Применение поворота.</p> 	<p>С точкой Торричелли связана задача Ферма о нахождении точки, сумма расстояний от которой до трех данных точек наименьшая.</p> <p>(задача <i>Ферма</i>). Для данного треугольника найдите точку, сумма расстояний от которой до вершин треугольника принимает наименьшее значение.</p>
<p>Четыре точки на окружности. Рассмотрим четырёхугольник $ABCD$. Для того, чтобы его вершины были расположены на одной окружности, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из следующих</p>	<p>Пусть в треугольнике ABC, H – точка пересечения высот треугольника; точки A_1, B_1, C_1 обозначают основания высот; A_2, B_2, C_2 – середины соответствующих сторон; A_3, B_3, C_3 – середины отрезков AA_1, BB_1 и CC_1. Тогда точки $A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2, A_3, B_3, C_3$ лежат на одной окружности, называемой <i>окружностью девяти точек</i> или <i>окружностью Эйлера</i>.</p>

<p>равенств:</p> <p>(1) $\angle ABD = \angle ACD$;</p> <p>(2) $\angle A + \angle C = 180^\circ$;</p> <p>(3) $KA \cdot KC = KB \cdot KD$;</p> <p>(4) $MA \cdot MB = MD \cdot MC$</p> <p>Где K – точка пересечения диагоналей, M – точка пересечения прямых AB и CD.</p>	
<p>Применение гомотетии.</p> 	<p>В треугольнике центр описанной окружности, точка пересечения медиан, точка пересечения высот и центр окружности девяти точек лежат на одной прямой, называемой <i>прямой Эйлера</i>. При этом центр окружности девяти точек лежит посередине между центром пересечения высот и центром описанной окружности.</p>
<p>Метод подобия.</p> 	<p>Теорема (Менелая). Пусть на сторонах AB, BC и продолжении стороны AC треугольника ABC взяты соответственно точки C_1, A_1 и B_1. Точки A_1, B_1, C_1 лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда выполняется равенство $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$</p> <p>Теорема (Ван-Обеля). Пусть на сторонах AB, BC и AC треугольника ABC взяты соответственно точки C_1, A_1 и B_1. Если прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в точке O, то имеет место равенство $\frac{CO}{OC_1} = \frac{CA_1}{A_1B} + \frac{CB_1}{B_1A}$</p>
<p>Метод площадей.</p> 	<p>Теорема (Чевы). Пусть на сторонах AB, BC и AC треугольника ABC взяты соответственно точки C_1, A_1 и B_1. Прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$</p>

Задачи для самостоятельного решения:

- (Метод вспомогательной окружности) Для произвольного треугольника основания перпендикуляров, опущенных из любой точки описанной около него окружности на его стороны или их продолжения, лежат на одной прямой, называемой *прямой Симсона*.
- (Теорема Менелая). Используя теорему Менелая, доказать, что отрезки, соединяющие вершины тетраэдра с центроидами противоположных граней, пересекаются в одной точке, называемой *центроидом тетраэдра*, и делятся в ней в отношении 3:1, считая от вершин.
- (Теорема Чевы). Докажите, что прямые, проходящие через вершины треугольника и точки касания вневписанных окружностей, пересекаются в одной точке (точке *Нагеля*). (Окружность называется *вневписанной* в треугольник, если она касается одной стороны этого треугольника и продолжений двух других его сторон.)

Домашнее задание:

- На медиане CC_1 треугольника ABC взята точка M . Прямые AM и BM пересекают стороны треугольника соответственно в точках A_1 и B_1 . Докажите, что прямые AB и A_1B_1 параллельны.
- Отрезок MN , соединяющий середины сторон AD и BC четырехугольника $ABCD$, делится диагоналями на три равные части. Докажите, что $ABCD$ – трапеция, одно из оснований AB или CD которой вдвое больше другого.