

## Теорема Птолемея

Произведение диагоналей вписанного четырехугольника равно сумме произведений его противоположных сторон. В четырехугольнике  $ABCD$ , вписанном в окружность,  $AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD$ .

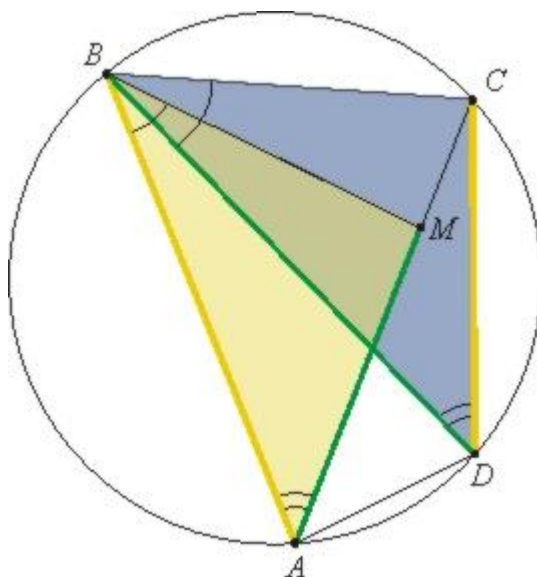


Рис. Доказательство теоремы Птолемея

Отметим на  $AC$  точку  $M$  такую, что  $\angle ABM = \angle DBC$ . Т. к. вписанные углы  $BDC$  и  $BAC$  опираются на одну и ту же хорду  $BC$ , они тоже равны друг другу. Таким образом, треугольники  $BDC$  и  $BAM$  подобны, а значит,  $CD/BD = MA/BA$ , или, перемножая крест на крест,  $MA \cdot BD = AB \cdot CD$ .

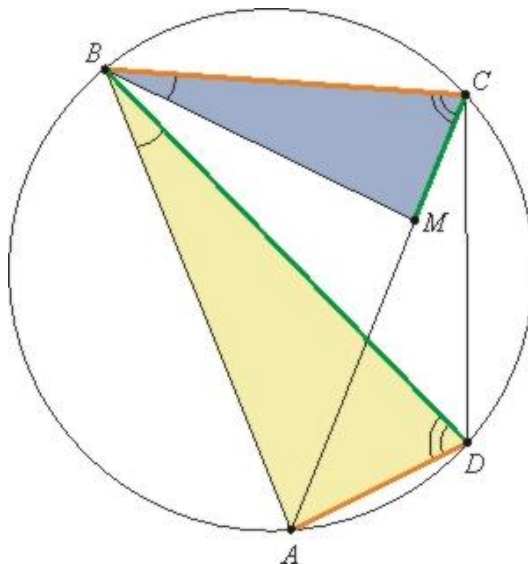


Рис. . Доказательство теоремы Птолемея

В то же время  $\angle ABD = \angle MBC$  (т. к.  $\angle ABM = \angle DBC$ ), а  $\angle BCA = \angle BDA$ , как опирающиеся на одну хорду  $AB$ . Значит,  $AD/BD = MC/BC$ , или, перемножая крест на крест,  $MC \cdot BD = AD \cdot BC$ .

Складывая почленно равенства  $MA \cdot BD = AB \cdot CD$  и  $MC \cdot BD = AD \cdot BC$ , получаем  $(MA + MC) \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC$ , или  $AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD$ , что и требовалось доказать.