

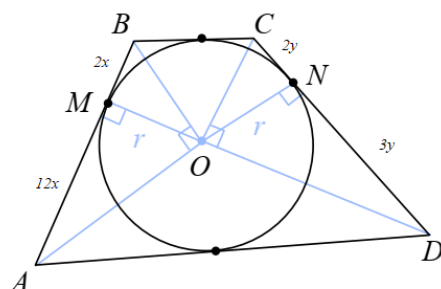
Окружность, вписанная в трапецию $ABCD$, касается ее боковых сторон AB и CD в точках M и N соответственно. Известно, что $AM = 6MB$ и $2DN = 3CN$.

а) Докажите, что $AD = 3BC$.

б) Найдите длину отрезка MN , если радиус окружности равен $\sqrt{105}$.

Решение:

Задача ЕГЭ 2017 года аналогична задаче, рассмотренной в предыдущем учебном модуле. Предлагаю рассмотреть иное решение для пункта б) известной нам задачи.



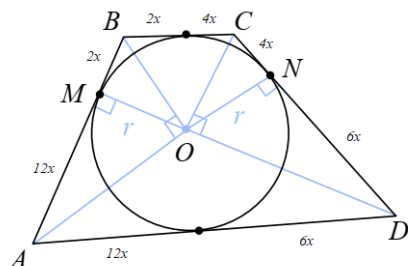
а) Напомню, что центр вписанной окружности – точка пересечения биссектрис, биссектрисы односторонних углов пересекаются под прямым углом, а радиус в точку касания – перпендикулярен касательной. Тогда OM – высота из прямого угла треугольника AOB , равна среднему геометрическому проекций катетов, а ON – высота из прямого угла прямоугольного треугольника DOC , равна среднему геометрическому проекций катетов. Откуда получаем:

$$OM = \sqrt{2x \cdot 12x} = 2x\sqrt{6}$$

$$ON = \sqrt{2y \cdot 3y} = y\sqrt{6}$$

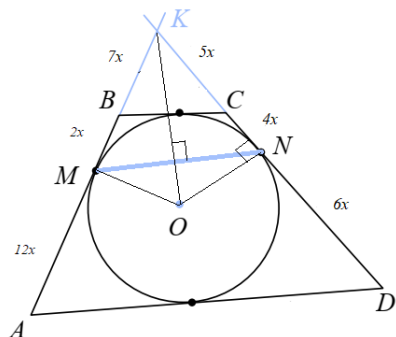
$$R = OM = ON = 2x\sqrt{6} = y\sqrt{6}$$

$$2x = y$$



Распишем равенство отрезков касательных, получим верхнее основание $6x$, а нижнее основание $18x$, что в три раза больше верхнего основания, что и требовалось доказать.

б) Пусть продолжение боковых сторон трапеции пересекаются в точке K . Треугольник BKC подобен треугольнику AKD с коэффициентом подобия $1:3$ (по доказанному в пункте а), тогда $BK=7x$ и $CK=5x$.



Отметим, что треугольник MKN – равнобедренный, $KM=KN=9x$, т.е. точка K равноудалена от точек M и N . Отметим, что треугольник OMN равнобедренный, так $ON=OM$ как радиусы, т.е. точка O равноудалена от точек M и N . Тогда отрезок OK является серединным перпендикуляром к отрезку MN по ГМТ серединного перпендикуляра. Значит, OK перпендикулярно MN и делит MN пополам.

В прямоугольном треугольнике ONK нам надо найти высоту из прямого угла, равную половине MN , если известен катет $NK=9x$ и катет $ON = 2x\sqrt{6}$.

$$OK = \sqrt{KN^2 + ON^2} = \sqrt{81x^2 + 24x^2} = x\sqrt{105}$$

$$\frac{MN}{2} = h = \frac{NK \cdot ON}{OK} = \frac{9x \cdot 2x\sqrt{6}}{x\sqrt{105}} = \frac{18x\sqrt{6}}{\sqrt{105}}$$

Осталось вспомнить, что по условию радиус окружности нам известен:

$$R = 2x\sqrt{6} = \sqrt{105}$$

$$x = \frac{\sqrt{105}}{2\sqrt{6}}$$

Тогда подставим x и найдем MN :

$$MN = 2 \cdot \frac{18\sqrt{6}}{\sqrt{105}} \cdot \frac{\sqrt{105}}{2\sqrt{6}} = 18$$

Ответ: 18

16 задание ЕГЭ 2017 год