

Параллельность и отношение отрезков.

| | |
|---|---|
| Точка C лежит на прямой AB | $\vec{AC} = k \cdot \vec{AB}$ при некотором k |
| Точка C делит отрезок AB в отношении $AC : CB = m : k$ | $k \cdot \vec{AC} = m \cdot \vec{CB}$ ($k > 0, m > 0$) |
| $ABCD$ — параллелограмм | $\vec{AB} = \vec{DC}$ |

| | |
|--|---|
| M — середина AB | $\vec{OM} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB})$ для любой точки O |
| Точка M делит отрезок AB в отношении $AM : MB = m : k$ | $\vec{OM} = \frac{k}{k+m} \cdot \vec{OA} + \frac{m}{k+m} \cdot \vec{OB}$ для любой точки O |
| M — точка пересечения медиан треугольника ABC | $\vec{OM} = \frac{1}{3}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC})$ для любой точки O |

Задача 1.

Доказать, что середины оснований и точка пересечения диагоналей трапеции лежат на одной прямой.

Решение. Пусть M, N — середины оснований BC и AD трапеции $ABCD$

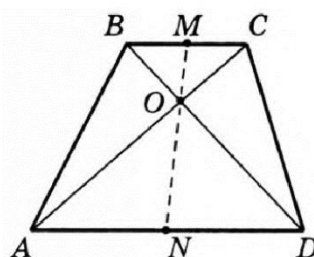
O — точка пересечения диагоналей. Из подобия треугольников AOD и BOC следует, что $\frac{OA}{OC} = \frac{OD}{OB}$. Обозначая буквой k эти отношения, получим

$$\vec{OA} = -k\vec{OC}, \quad \vec{OD} = -k\vec{OB}.$$

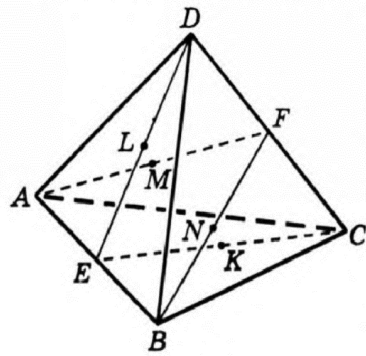
Тогда

$$\begin{aligned} \vec{ON} &= \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OD}) = \frac{1}{2}(-k\vec{OC} - k\vec{OB}) = \\ &= -k \cdot \frac{1}{2}(\vec{OC} + \vec{OB}) = -k\vec{OM}. \end{aligned}$$

Таким образом, точки M, O, N лежат на одной прямой, что и требовалось доказать.



Задача 2.



В тетраэдре $ABCD$ точки E и F — середины ребер AB и CD . Доказать, что середины отрезков CE , DE , AF и BF являются вершинами параллелограмма.

Решение. Пусть K , L , M , N — середины отрезков CE , DE , AF и BF

Докажем равенство векторов \vec{KN} и \vec{ML} , выразив их через векто-

ры \vec{OA} , \vec{OB} , \vec{OC} , \vec{OD} , где O — произвольная точка:

$$\begin{aligned}\vec{KN} &= \vec{ON} - \vec{OK} = \frac{1}{2}(\vec{OB} + \vec{OF}) - \frac{1}{2}(\vec{OC} + \vec{OE}) = \\ &= \frac{1}{2}\left(\vec{OB} + \frac{1}{2}(\vec{OC} + \vec{OD}) - \vec{OC} - \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB})\right) = \\ &= \frac{1}{4}(\vec{OB} - \vec{OC} + \vec{OD} - \vec{OA}),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{ML} &= \vec{OL} - \vec{OM} = \frac{1}{2}(\vec{OD} + \vec{OE}) - \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OF}) = \\ &= \frac{1}{2}\left(\vec{OD} + \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB}) - \vec{OA} - \frac{1}{2}(\vec{OC} + \vec{OD})\right) = \\ &= \frac{1}{4}(\vec{OD} - \vec{OA} + \vec{OB} - \vec{OC}).\end{aligned}$$

Следовательно, $\vec{KN} = \vec{ML}$, что и требовалось доказать.

Условие принадлежности трех точек одной прямой и четырех точек одной плоскости.

Пусть точка C лежит на прямой AB , точка O не лежит на этой прямой и имеет место равенство $\vec{OC} = \alpha \vec{OA} + \beta \vec{OB}$.
Тогда $\alpha + \beta = 1$.

Пусть теперь точка D лежит в плоскости ABC , точка O не лежит в этой плоскости и имеет место равенство
$$\vec{OD} = \alpha \vec{OA} + \beta \vec{OB} + \gamma \vec{OC}.$$

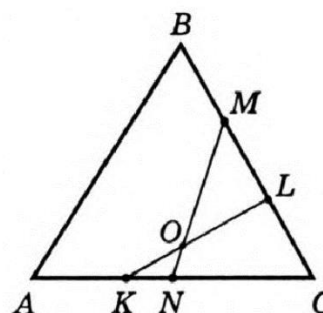
Тогда $\alpha + \beta + \gamma = 1$.

Задача 3.

Точки K, L, M на сторонах AC, BC, AB треугольника ABC таковы, что $\frac{AK}{KC} = \frac{CL}{LB} = \frac{BM}{MC} = \frac{1}{2}$, N — середина стороны AC . Найти отношение, в котором точка пересечения отрезков KL и MN делит отрезок KL .

Решение. Обозначим через O точку пересечения отрезков MN и KL
и через x — отношение $\frac{KO}{KL}$.

Тогда $\vec{KO} = x \vec{KL}$.



Учитывая, что L — середина MC и $KN = \frac{1}{4} KC$, получаем

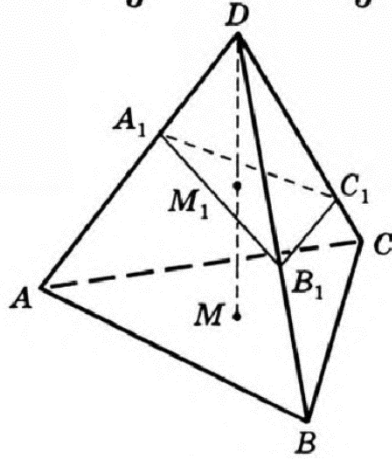
$$\begin{aligned}\vec{KO} &= x \vec{KL} = x \cdot \frac{1}{2} (\vec{KM} + \vec{KC}) = \frac{x}{2} (\vec{KM} + 4\vec{KN}) = \\ &= \frac{x}{2} \vec{KM} + 2x \vec{KN}.\end{aligned}$$

Так как точка O лежит на прямой MN , то $\frac{x}{2} + 2x = 1$.

Откуда $x = \frac{2}{5}$. Значит, $\frac{KO}{OL} = \frac{2}{3}$.

Задача 4.

Точки A_1, B_1, C_1 на ребрах AD, BD, CD правильной треугольной пирамиды $DABC$ таковы, что $A_1D = \frac{2}{5}AD$, $B_1D = \frac{3}{5}BD$, $C_1D = \frac{4}{5}CD$. В каком отношении высота пирамиды, проведенная из вершины D , делится плоскостью $A_1B_1C_1$?



Решение. Пусть M_1 — точка пересечения высоты DM тетраэдра $ABCD$ и плоскости $A_1B_1C_1$

Обозначим через x отношение $\frac{DM_1}{DM}$. Тогда $\vec{DM}_1 = x \vec{DM}$. Пирамида $DABC$ — правильная, следовательно, M — точка пересечения медиан $\triangle ABC$ и

$\vec{DM} = \frac{1}{3}(\vec{DA} + \vec{DB} + \vec{DC})$. Кроме того, из условия имеем:

$$\vec{DA} = \frac{5}{2}\vec{DA_1}, \quad \vec{DB} = \frac{5}{3}\vec{DB_1}, \quad \vec{DC} = \frac{5}{4}\vec{DC_1},$$

и окончательно

$$\vec{DM}_1 = \frac{5x}{6}\vec{DA_1} + \frac{5x}{9}\vec{DB_1} + \frac{5x}{12}\vec{DC_1}.$$

Так как точки M_1, A_1, B_1, C_1 лежат в одной плоскости, то $\frac{5x}{6} + \frac{5x}{9} + \frac{5x}{12} = 1$, откуда $x = \frac{36}{65}$.

Ответ: $\frac{36}{65}$.

Векторные свойства, связанные с замечательными точками треугольника.

В треугольнике ABC проведены медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 , которые пересекаются в точке M , тогда $\vec{AM} + \vec{BM} + \vec{CM} = \vec{0}$.

В $\triangle ABC$ точка L есть точка пересечения биссектрис треугольника, где $AB = c$, $BC = a$ и $CA = b$, тогда для любой точки E справедливо векторное тождество

$$\vec{EL} = \frac{a \cdot \vec{EA} + b \cdot \vec{EB} + c \cdot \vec{EC}}{a + b + c}.$$

В $\triangle ABC$ точка H — точка пересечения высот (ортоцентр), точка O — центр описанной окружности, тогда $\vec{OH} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$.

Задача 5

В любом треугольнике ABC центр описанной окружности, ортоцентр и центроид (или центр масс) лежат на общей прямой.

Доказательство

Пусть точка O — центр описанной окружности, H — точка пересечения высот, M — точка пересечения медиан.

$$\vec{OM} = \frac{\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}}{3},$$

$$\vec{OH} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$$

$$\text{Значит } \vec{OM} = \frac{\vec{OH}}{3}, \text{ т. е. } \vec{OH} = 3\vec{OM}.$$

Это означает, что точки O , H и M принадлежат одной прямой — этот замечательный факт был доказан еще Эйлером.

Применение свойств скалярного произведения.

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$$

Для ненулевых векторов \vec{a} и \vec{b} :

$$\cos(\widehat{\vec{a}; \vec{b}}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$$

Для нахождения скалярного произведения двух векторов можно обойтись без знания косинуса угла между ними, если известна длина третьего вектора, являющегося суммой или разностью исходных векторов.

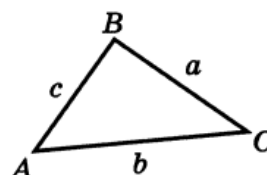
Пример 1

$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$, тогда

$$\begin{aligned} (\vec{AB} + \vec{BC})^2 &= \\ &= \vec{AB}^2 + 2 \cdot \vec{AB} \cdot \vec{BC} + \vec{BC}^2 = \vec{AC}^2. \end{aligned}$$

Так как $|\vec{AB}| = c$, $|\vec{BC}| = a$, $|\vec{AC}| = b$,
то $c^2 + 2 \cdot \vec{AB} \cdot \vec{BC} + a^2 = b^2$.

Следовательно,
$$\vec{AB} \cdot \vec{BC} = \frac{b^2 - a^2 - c^2}{2}.$$



Пример 2. $\vec{BC} = \vec{AC} - \vec{AB}$,

тогда $\vec{BC}^2 = (\vec{AC} - \vec{AB})^2 = \vec{AC}^2 - 2 \cdot \vec{AC} \cdot \vec{AB} + \vec{AB}^2$,

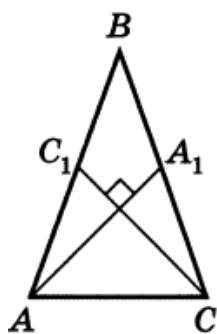
следовательно, $a^2 = b^2 - 2 \cdot \vec{AC} \cdot \vec{AB} + c^2$,

значит $\vec{AC} \cdot \vec{AB} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}$.

Примечание. В примере 1 векторы \vec{AB} и \vec{BC} не имели общего начала. В примере 2 векторы \vec{AC} и \vec{AB} имеют общее начало.

Задача 6

Найдите косинус угла, лежащего против основания равнобедренного треугольника, если медианы, проведенные к боковым сторонам, взаимно перпендикулярны.



а) Положим $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{c}$.

$$|\overrightarrow{BA}| = |\overrightarrow{BC}|, \text{ т. е. } |\vec{a}| = |\vec{c}|.$$

Тогда

$$\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{BA_1} - \overrightarrow{BA} = \frac{1}{2}\vec{c} - \vec{a};$$

$$\overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{BC_1} - \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\vec{a} - \vec{c}.$$

б) Так как $\overrightarrow{AA_1} \perp \overrightarrow{CC_1}$, то $\overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{CC_1} = 0$.

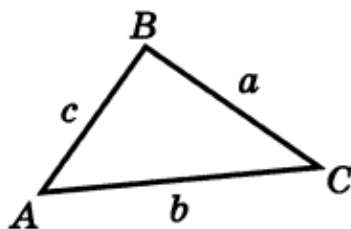
$$\text{Значит } \left(\frac{1}{2}\vec{c} - \vec{a}\right) \left(\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{c}\right) = 0.$$

$$\text{Тогда } \frac{1}{2}\vec{c} \cdot \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{a}^2 - \frac{1}{2}\vec{c}^2 + \vec{a} \cdot \vec{c} = 0.$$

$$\vec{c}^2 = \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2, \text{ следовательно } \frac{5}{4}|\vec{a}| \cdot |\vec{c}| \cdot \cos(\angle ABC) = |\vec{a}|^2.$$

$$\text{Значит } \cos(\angle ABC) = \frac{|\vec{a}|^2}{\frac{5}{4}|\vec{a}| \cdot |\vec{c}|}, \text{ т. е. } \boxed{\cos(\angle ABC) = \frac{4}{5}}.$$

Задача 7



Для треугольника ABC, в котором $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$, R - радиус описанной окружности, докажите справедливость следующих неравенств:

$$\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C \geq -\frac{3}{2}$$

$$a^2 + b^2 + c^2 \leq 9R^2$$

Пусть точка O – центр описанной около данного треугольника окружности. Угол BOC – центральный, угол BAC – вписанный, опирающийся на ту же дугу BC , тогда $\angle BOC = 2\angle A$. Аналогично $\angle AOC = 2\angle B$, $\angle AOB = 2\angle C$.

По свойству скалярного квадрата вектора $(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})^2 \geq 0$

$$\text{Откуда } \overrightarrow{OA}^2 + \overrightarrow{OB}^2 + \overrightarrow{OC}^2 + 2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} + 2\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} \geq 0$$

Учитывая, что $OA = OB = OC = R$, получаем $3R^2 + 2R^2(\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C) \geq 0$, откуда

$$\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C \geq -\frac{3}{2}$$

Так как

$$\cos 2A = 1 - 2\sin^2 A = 1 - \frac{a^2}{2R^2};$$

$$\cos 2B = 1 - 2\sin^2 B = 1 - \frac{b^2}{2R^2};$$

$$\cos 2C = 1 - 2\sin^2 C = 1 - \frac{c^2}{2R^2};$$

То неравенство $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C \geq -\frac{3}{2}$ принимает вид $3 - \frac{a^2}{2R^2} - \frac{b^2}{2R^2} - \frac{c^2}{2R^2} \geq -\frac{3}{2}$,

откуда $a^2 + b^2 + c^2 \leq 9R^2$

Задачи для самостоятельного решения:

1. Докажите, что середины оснований трапеции и точка пересечения прямых, содержащих боковые стороны, лежат на одной прямой.
2. Точка O – центр окружности, описанной около $\triangle ABC$, а точка H такова, что $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$. Докажите, что H – ортоцентр $\triangle ABC$.
3. Для треугольника ABC , в котором $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$, R – радиус описанной окружности. Докажите, что $\cos 2A + \cos 2B - \cos 2C \leq \frac{3}{2}$.