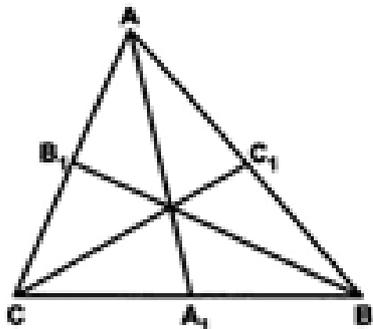


Задача 1.

Докажите, что из медиан треугольника можно составить треугольник.



Решение: Пусть  $AA_1, BB_1, CC_1$  - медианы треугольника  $ABC$ , тогда

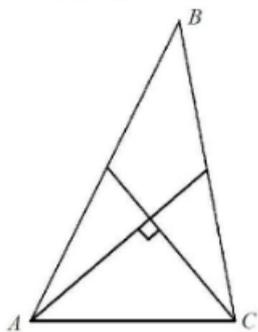
$$\overrightarrow{AA_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CA}),$$

$$\overrightarrow{BB_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB}),$$

$$\overrightarrow{CC_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{BC})$$

Отсюда  $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \vec{0}$

Задача 2.



Докажите, что медианы AM и BN треугольника ABC перпендикулярны тогда и только тогда, когда выполняется условие  $BC^2 + AC^2 = 5AB^2$

Введем обозначения  $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{CD} = \vec{b}$ .

Тогда

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{CM} - \overrightarrow{CA} = \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{a}$$

$$\overrightarrow{BN} = \frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}$$

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BN} = \frac{5}{4}\vec{a} \cdot \vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}^2 - \frac{1}{2}\vec{b}^2 = \frac{5}{4}\vec{a} \cdot \vec{b} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}^2 - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}^2$$

Далее

$$AB^2 = \overrightarrow{AB}^2 = (\vec{b} - \vec{a})^2 = BC^2 + AC^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b}$$

откуда

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{BC^2 + AC^2 - AB^2}{2}$$

Подставив полученное значение для  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  в первое равенство, получаем

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BN} &= \frac{5}{4}\vec{a} \cdot \vec{b} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}^2 - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}^2 = \\ &= \frac{5}{4} \cdot \frac{BC^2 + AC^2 - AB^2}{2} - \frac{1}{2}AC^2 - \frac{1}{2}BC^2 = \\ &= \frac{1}{8}(AC^2 + BC^2 - 5AB^2) \end{aligned}$$

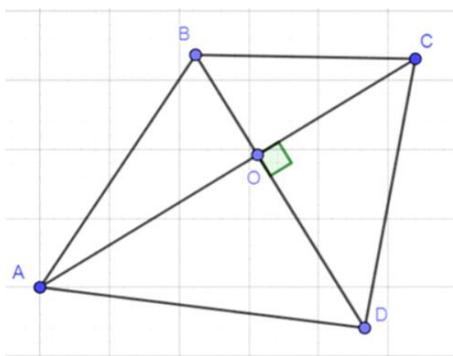
Таким образом,  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BN} = 0$  тогда и только тогда, когда

$$(AC^2 + BC^2 - 5AB^2) = 0$$

$$AC^2 + BC^2 = 5AB^2$$

откуда и следует утверждение задачи.

Задача 3.



Докажите, что диагонали четырехугольника взаимно перпендикулярны тогда и только тогда, когда равны суммы квадратов его противоположных сторон.

Пусть ABCD – данный четырехугольник. Введем обозначения  $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ ,  $\overrightarrow{CD} = \vec{c}$ .

Тогда

$$\overrightarrow{DA} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$$

$$\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$$

$$\overrightarrow{BD} = \vec{b} + \vec{c}$$

Имеем:

$$AB^2 + CD^2 = BC^2 + DA^2,$$

$$\vec{a}^2 + \vec{c}^2 = \vec{b}^2 + (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})^2$$

$$2(\vec{b}^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{a} \cdot \vec{c}) = 0$$

$$\vec{b} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = 0$$

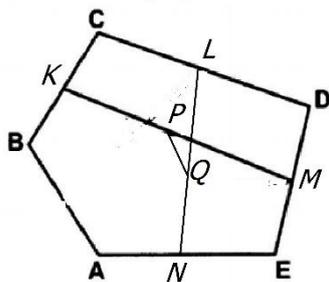
$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = 0$$

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$$

$$AC \perp BD$$

Утверждение доказано.

Задача 4.



Пусть  $K, L, M, N$  – середины отрезков  $BC, CD, DE, EA$  пятиугольника  $ABCDE$ , а точки  $P$  и  $Q$  – середины отрезков  $KM$  и  $LN$ . Докажите, что отрезки  $PQ$  и  $AB$  параллельны и найдите отношение их длин.

**Решение.** Выразим вектор  $\vec{PQ}$  через векторы  $\vec{OE}, \vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}, \vec{OD}$ , где  $O$  – произвольная точка. По формуле разности,  $\vec{PQ} = \vec{OQ} - \vec{OP}$ . Так как  $Q$  – середина  $LN$ , а  $P$  – середина  $KM$ , то  $\vec{OQ} = \frac{1}{2}(\vec{OL} + \vec{ON})$ ,  $\vec{OP} = \frac{1}{2}(\vec{OK} + \vec{OM})$ .

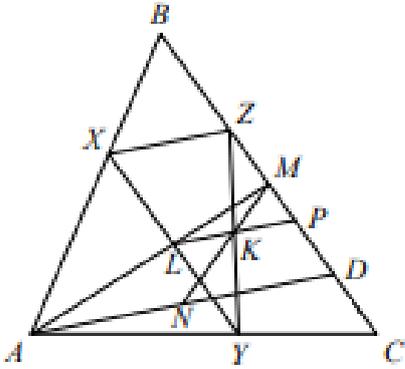
$$\text{В свою очередь, } \vec{OL} = \frac{1}{2}(\vec{OC} + \vec{OD}), \vec{ON} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OE}), \\ \vec{OK} = \frac{1}{2}(\vec{OB} + \vec{OC}), \vec{OM} = \frac{1}{2}(\vec{OD} + \vec{OE}).$$

$$\text{Откуда } \vec{PQ} = \frac{1}{2}(\vec{OL} + \vec{ON}) - \frac{1}{2}(\vec{OK} + \vec{OM}) = \\ = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(\vec{OC} + \vec{OD}) + \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OE})\right) - \\ - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(\vec{OB} + \vec{OC}) + \frac{1}{2}(\vec{OD} + \vec{OE})\right) = \frac{1}{4}(\vec{OA} - \vec{OB}) = \frac{1}{4}\vec{BA}.$$

Отсюда следует, что отрезки  $PQ$  и  $AB$  параллельны и отношение их длин равно  $\frac{1}{4}$ .

Задача 5.

На сторонах  $BC$  и  $AB$  остроугольного треугольника  $ABC$  выбраны точки  $D$  и  $X$ . Прямые, проходящие через  $X$  параллельно  $BC$  и  $AD$ , пересекают соответственно стороны  $AC$  и  $BC$  в точках  $Y$  и  $Z$ . Пусть  $M$ ,  $K$  и  $N$  — середины отрезков  $BC$ ,  $YZ$  и  $AD$  соответственно. Найдите угол  $MKN$ .



Положим  $\vec{b} = \vec{AB}, \vec{c} = \vec{AC}, \lambda = \frac{BX}{AB}$ . Тогда

$$\begin{aligned} 2\vec{AK} &= \vec{AZ} + \vec{AY} = \vec{b} + \lambda(\vec{AD} - \vec{b}) + (1 - \lambda)\vec{c} = \\ &= (1 - \lambda)(\vec{b} + \vec{c}) + \lambda\vec{AD} = 2((1 - \lambda)\vec{AM} + \lambda\vec{AN}). \end{aligned}$$

После сокращения на 2 мы получим

$$\vec{MK} = \vec{AK} - \vec{AM} = \lambda(\vec{AN} - \vec{AM}) = \lambda\vec{MN}.$$

Значит, точки  $M$ ,  $K$ ,  $N$  лежат на одной прямой и  $\angle MKN = 180^\circ$ .

Задача 6.

В треугольнике  $ABC$  проведена медиана  $BM$ , в треугольнике  $ABM$  — медиана  $BN$ , в треугольнике  $BNC$  — медиана  $NK$ . Оказалось, что  $NK \perp BM$ . Найдите отношение  $AB : AC$ .

**Решение.** Обозначим  $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$  и  $\vec{a} = \overrightarrow{AC}$ . Тогда

$$\overrightarrow{NK} = \overrightarrow{AK} - \overrightarrow{AN} = \frac{\vec{a} + \frac{\vec{a}}{2} - \frac{\vec{b}}{4}}{4},$$

$$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB} = \frac{\vec{a}}{2} - \vec{b},$$

$$0 = \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{NK} = \frac{\vec{a}^2 - 4\vec{b}^2}{8},$$

откуда  $|\vec{a}| = 2|\vec{b}|$ , то есть  $AB : AC = \frac{1}{2}$ .

Ответ:  $\frac{1}{2}$ .

Задача 7.

Доказать, что в произвольном треугольнике  $ABC$

$$\operatorname{ctg} \angle A + \operatorname{ctg} \angle B + \operatorname{ctg} \angle C = \frac{AB^2 + BC^2 + CA^2}{4S}$$

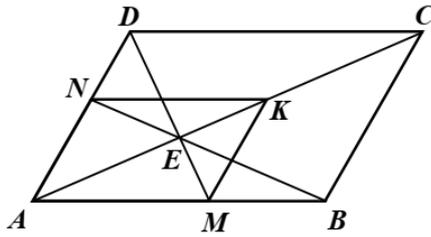
$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C &= \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{AB \cdot AC \sin A} + \frac{\vec{AB} \cdot \vec{BC}}{AB \cdot BC \sin B} + \\ &+ \frac{\vec{BC} \cdot \vec{CA}}{BC \cdot CA \sin C} = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC} + \vec{AB} \cdot \vec{BC} + \vec{BC} \cdot \vec{CA}}{2S}. \end{aligned}$$

Далее воспользуйтесь тем, что

$$\begin{aligned} 2(\vec{AB} \cdot \vec{AC} + \vec{AB} \cdot \vec{BC} + \vec{BC} \cdot \vec{CA}) &= \\ = (\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA})^2 - (|AB|^2 + |BC|^2 + |CA|^2). \end{aligned}$$

Задача 8.

Даны два параллелограмма  $ABCD$  и  $AMKN$ , причем вершины  $M$  и  $N$  второго параллелограмма лежат на сторонах  $AB$  и  $AD$  соответственно первого. Прямые  $BN$  и  $DM$  пересекаются в точке  $E$ . Докажите, что точки  $E, K, C$  лежат на одной прямой.



*Решение.* Поскольку  $ABCD$  и  $AMKN$  – параллелограммы, то

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}.$$

Кроме того, из условия задачи следует, что  $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AN} = \mu \overrightarrow{AD}$ , и значит,

$$\overrightarrow{AK} = \lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{AD}.$$

В силу опорной задачи точка  $E$  принадлежит прямой  $DM$  тогда и только тогда, когда

$$\overrightarrow{AE} = \alpha \overrightarrow{AD} + \beta \overrightarrow{AM}, \alpha + \beta = 1.$$

Прямой же  $BN$  эта точка принадлежит при выполнении условий

$$\overrightarrow{AE} = \gamma \overrightarrow{AB} + \delta \overrightarrow{AN}, \gamma + \delta = 1.$$

Заменяя векторы  $\overrightarrow{AM}$ ,  $\overrightarrow{AN}$  коллинеарными им векторами  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AD}$ , будем иметь:  $\overrightarrow{AE} = \beta \lambda \overrightarrow{AB} + \alpha \overrightarrow{AD} = \gamma \overrightarrow{AB} + \delta \mu \overrightarrow{AD}$ . Отсюда следует, что  $\beta \lambda = \gamma$ ,  $\delta \mu = \alpha$ . Поэтому  $\alpha$ ,  $\beta$  можно выразить через  $\lambda$ ,  $\mu$  из следующей системы:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1, \\ \frac{1}{\mu} \alpha + \lambda \beta = 1. \end{cases}$$

Решая систему, находим, что  $\alpha = \frac{(1-\lambda)\mu}{1-\lambda\mu}$ ,  $\beta = \frac{1-\mu}{1-\lambda\mu}$ . Следовательно,

$$\overrightarrow{AE} = \frac{(1-\mu)\lambda}{1-\lambda\mu} \overrightarrow{AB} + \frac{(1-\lambda)\mu}{1-\lambda\mu} \overrightarrow{AD}.$$

Вычислим теперь векторы  $\overrightarrow{CK}$  и  $\overrightarrow{KE}$ :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CK} &= \overrightarrow{AK} - \overrightarrow{AC} = (\lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{AD}) - (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = \\ &= (\lambda - 1) \overrightarrow{AB} + (\mu - 1) \overrightarrow{AD}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{KE} &= \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AK} = \left( \frac{(1-\mu)\lambda}{1-\lambda\mu} \overrightarrow{AB} + \frac{(1-\lambda)\mu}{1-\lambda\mu} \overrightarrow{AD} \right) - (\lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{AD}) = \\ &= \frac{\lambda\mu}{1-\lambda\mu} \left( (\lambda - 1) \overrightarrow{AB} + (\mu - 1) \overrightarrow{AD} \right). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что  $\overrightarrow{CK} = \frac{1-\lambda\mu}{\lambda\mu} \overrightarrow{KE}$ . Таким образом, точки  $C, K, E$  лежат на одной прямой и точка  $K$  делит отрезок  $CE$  в отношении  $\frac{1-\lambda\mu}{\lambda\mu}$ . Точка  $K$  будет серединой отрезка  $CE$  тогда и только тогда, когда это отношение равно 1, т.е. при условии  $\lambda\mu = \frac{1}{2}$ .  $\square$