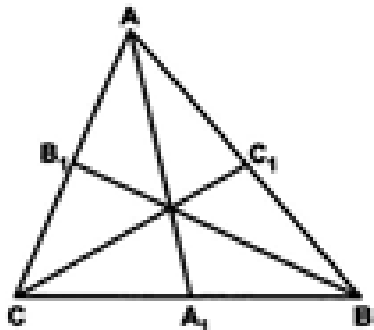


Задача 1.

Докажите, что из медиан треугольника можно составить треугольник.



Решение: Пусть AA_1 , BB_1 , CC_1 - медианы треугольника ABC , тогда

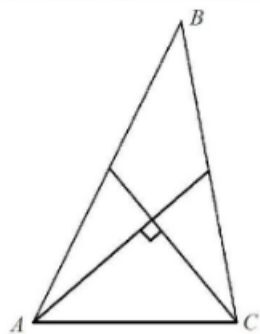
$$\overrightarrow{AA_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CA}),$$

$$\overrightarrow{BB_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB}),$$

$$\overrightarrow{CC_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{BC})$$

Отсюда $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \vec{0}$

Задача 2.



Докажите, что медианы AM и BN треугольника ABC перпендикулярны тогда и только тогда, когда выполняется условие $BC^2 + AC^2 = 5AB^2$

Введем обозначения $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$.

Тогда

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{CM} - \overrightarrow{CA} = \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{a}$$

$$\overrightarrow{BN} = \frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}$$

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BN} = \frac{5}{4}\vec{a} \cdot \vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}^2 - \frac{1}{2}\vec{b}^2 = \frac{5}{4}\vec{a} \cdot \vec{b} - \frac{1}{2}AC^2 - \frac{1}{2}BC^2$$

Далее

$$AB^2 = \overrightarrow{AB}^2 = (\vec{b} - \vec{a})^2 = BC^2 + AC^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b}$$

откуда

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{BC^2 + AC^2 - AB^2}{2}$$

Подставив полученное значение для $\vec{a} \cdot \vec{b}$ в первое равенство, получаем

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BN} &= \frac{5}{4}\vec{a} \cdot \vec{b} - \frac{1}{2}AC^2 - \frac{1}{2}BC^2 = \\ &= \frac{5}{4} \cdot \frac{BC^2 + AC^2 - AB^2}{2} - \frac{1}{2}AC^2 - \frac{1}{2}BC^2 = \\ &= \frac{1}{8}(AC^2 + BC^2 - 5AB^2) \end{aligned}$$

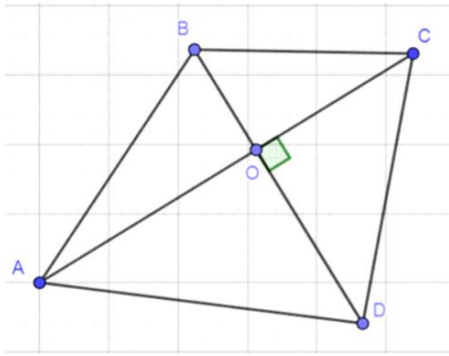
Таким образом, $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BN} = 0$ тогда и только тогда, когда

$$(AC^2 + BC^2 - 5AB^2) = 0$$

$$AC^2 + BC^2 = 5AB^2$$

откуда и следует утверждение задачи.

Задача 3.



Докажите, что диагонали четырехугольника взаимно перпендикулярны тогда и только тогда, когда равны суммы квадратов его противоположных сторон.

Пусть ABCD – данный четырехугольник. Введем обозначения $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$, $\overrightarrow{CD} = \vec{c}$.

Тогда

$$\overrightarrow{DA} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$$

$$\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$$

$$\overrightarrow{BD} = \vec{b} + \vec{c}$$

Имеем:

$$AB^2 + CD^2 = BC^2 + DA^2,$$

$$\vec{a}^2 + \vec{c}^2 = \vec{b}^2 + (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})^2$$

$$2(\vec{b}^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{a} \cdot \vec{c}) = 0$$

$$\vec{b} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = 0$$

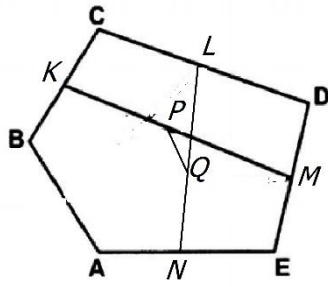
$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = 0$$

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$$

$$AC \perp BD$$

Утверждение доказано.

Задача 4.



Пусть K, L, M, N – середины отрезков BC, CD, DE, EA пятиугольника $ABCDE$, а точки P и Q – середины отрезков KM и LN . Докажите, что отрезки PQ и AB параллельны и найдите отношение их длин.

Решение. Выразим вектор \vec{PQ} через векторы $\vec{OE}, \vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}, \vec{OD}$, где O – произвольная точка. По формуле разности, $\vec{PQ} = \vec{OQ} - \vec{OP}$. Так как Q – середина LN , а P – середина KM , то $\vec{OQ} = \frac{1}{2}(\vec{OL} + \vec{ON})$, $\vec{OP} = \frac{1}{2}(\vec{OK} + \vec{OM})$.

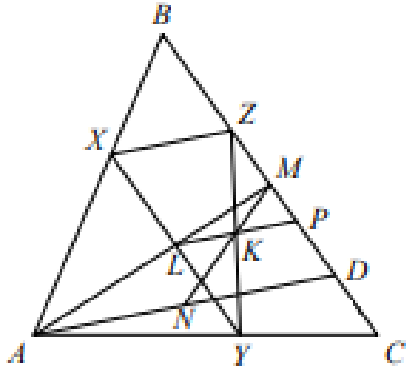
$$\text{В свою очередь, } \vec{OL} = \frac{1}{2}(\vec{OC} + \vec{OD}), \vec{ON} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OE}), \\ \vec{OK} = \frac{1}{2}(\vec{OB} + \vec{OC}), \vec{OM} = \frac{1}{2}(\vec{OD} + \vec{OE}).$$

$$\begin{aligned} \text{Откуда } \vec{PQ} &= \frac{1}{2}(\vec{OL} + \vec{ON}) - \frac{1}{2}(\vec{OK} + \vec{OM}) = \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(\vec{OC} + \vec{OD}) + \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OE})\right) - \\ &- \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(\vec{OB} + \vec{OC}) + \frac{1}{2}(\vec{OD} + \vec{OE})\right) = \frac{1}{4}(\vec{OA} - \vec{OB}) = \frac{1}{4}\vec{BA}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что отрезки PQ и AB параллельны и отношение их длин равно $\frac{1}{4}$.

Задача 5.

На сторонах BC и AB остроугольного треугольника ABC выбраны точки D и X . Прямые, проходящие через X параллельно BC и AD , пересекают соответственно стороны AC и BC в точках Y и Z . Пусть M , K и N — середины отрезков BC , YZ и AD соответственно. Найдите угол MKN .



Положим $\vec{b} = \vec{AB}, \vec{c} = \vec{AC}, \lambda = \frac{BX}{AB}$. Тогда

$$\begin{aligned} 2\vec{AK} &= \vec{AZ} + \vec{AY} = \vec{b} + \lambda(\vec{AD} - \vec{b}) + (1 - \lambda)\vec{c} = \\ &= (1 - \lambda)(\vec{b} + \vec{c}) + \lambda\vec{AD} = 2((1 - \lambda)\vec{AM} + \lambda\vec{AN}). \end{aligned}$$

После сокращения на 2 мы получим

$$\vec{MK} = \vec{AK} - \vec{AM} = \lambda(\vec{AN} - \vec{AM}) = \lambda\vec{MN}.$$

Значит, точки M , K , N лежат на одной прямой и $\angle MKN = 180^\circ$.

Задача 6.

В треугольнике ABC проведена медиана BM , в треугольнике ABM — медиана BN , в треугольнике BNC — медиана NK . Оказалось, что $NK \perp BM$. Найдите отношение $AB : AC$.

Решение. Обозначим $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{a} = \overrightarrow{AC}$. Тогда

$$\overrightarrow{NK} = \overrightarrow{AK} - \overrightarrow{AN} = \frac{\vec{a} + \frac{\vec{a}}{2} - \frac{\vec{b}}{4}}{4},$$

$$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB} = \frac{\vec{a}}{2} - \vec{b},$$

$$0 = \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{NK} = \frac{\vec{a}^2 - 4\vec{b}^2}{8},$$

откуда $|\vec{a}| = 2|\vec{b}|$, то есть $AB : AC = \frac{1}{2}$.

Ответ: $\frac{1}{2}$.

Задача 7.

Доказать, что в произвольном треугольнике ABC

$$\operatorname{ctg} \angle A + \operatorname{ctg} \angle B + \operatorname{ctg} \angle C = \frac{AB^2 + BC^2 + CA^2}{4S}$$

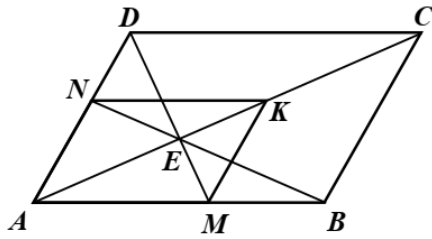
$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C &= \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{AB \cdot AC \sin A} + \frac{\vec{AB} \cdot \vec{BC}}{AB \cdot BC \sin B} + \\ &+ \frac{\vec{BC} \cdot \vec{CA}}{BC \cdot CA \sin C} = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC} + \vec{AB} \cdot \vec{BC} + \vec{BC} \cdot \vec{CA}}{2S}. \end{aligned}$$

Далее воспользуемся тем, что

$$\begin{aligned} 2(\vec{AB} \cdot \vec{AC} + \vec{AB} \cdot \vec{BC} + \vec{BC} \cdot \vec{CA}) &= \\ &= (\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA})^2 - (|AB|^2 + |BC|^2 + |CA|^2). \end{aligned}$$

Задача 8.

Даны два параллелограмма $ABCD$ и $AMKN$, причем вершины M и N второго параллелограмма лежат на сторонах AB и AD соответственно первого. Прямые BN и DM пересекаются в точке E . Докажите, что точки E, K, C лежат на одной прямой.



Решение. Поскольку $ABCD$ и $AMKN$ – параллелограммы, то

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}.$$

Кроме того, из условия задачи следует, что $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AN} = \mu \overrightarrow{AD}$, и значит,

$$\overrightarrow{AK} = \lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{AD}.$$

В силу опорной задачи точка E принадлежит прямой DM тогда и только тогда, когда

$$\overrightarrow{AE} = \alpha \overrightarrow{AD} + \beta \overrightarrow{AM}, \alpha + \beta = 1.$$

Прямой же BN эта точка принадлежит при выполнении условий

$$\overrightarrow{AE} = \gamma \overrightarrow{AB} + \delta \overrightarrow{AN}, \gamma + \delta = 1.$$

Заменяя векторы \overrightarrow{AM} , \overrightarrow{AN} коллинеарными им векторами \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AD} , будем иметь: $\overrightarrow{AE} = \beta \lambda \overrightarrow{AB} + \alpha \overrightarrow{AD} = \gamma \overrightarrow{AB} + \delta \mu \overrightarrow{AD}$. Отсюда следует, что $\beta \lambda = \gamma$, $\delta \mu = \alpha$. Поэтому α , β можно выразить через λ , μ из следующей системы:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1, \\ \frac{1}{\mu} \alpha + \lambda \beta = 1. \end{cases}$$

Решая систему, находим, что $\alpha = \frac{(1-\lambda)\mu}{1-\lambda\mu}$, $\beta = \frac{1-\mu}{1-\lambda\mu}$. Следовательно,

$$\overrightarrow{AE} = \frac{(1-\mu)\lambda}{1-\lambda\mu} \overrightarrow{AB} + \frac{(1-\lambda)\mu}{1-\lambda\mu} \overrightarrow{AD}.$$

Вычислим теперь векторы \overrightarrow{CK} и \overrightarrow{KE} :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CK} &= \overrightarrow{AK} - \overrightarrow{AC} = (\lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{AD}) - (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = \\ &= (\lambda - 1) \overrightarrow{AB} + (\mu - 1) \overrightarrow{AD}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{KE} &= \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AK} = \left(\frac{(1-\mu)\lambda}{1-\lambda\mu} \overrightarrow{AB} + \frac{(1-\lambda)\mu}{1-\lambda\mu} \overrightarrow{AD} \right) - (\lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{AD}) = \\ &= \frac{\lambda\mu}{1-\lambda\mu} ((\lambda - 1) \overrightarrow{AB} + (\mu - 1) \overrightarrow{AD}). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $\overrightarrow{CK} = \frac{1-\lambda\mu}{\lambda\mu} \overrightarrow{KE}$. Таким образом, точки C, K, E лежат на одной прямой и точка K делит отрезок CE в отношении $\frac{1-\lambda\mu}{\lambda\mu}$. Точка K будет серединой отрезка CE тогда и только тогда,

когда это отношение равно 1, т.е. при условии $\lambda\mu = \frac{1}{2}$. \square