Разные приемы при решении неравенств.

Пример 1. Максимальное число.

Пусть требуется доказать неравенство для какого-либо набора переменных, например, для $a_1, a_2, ..., a_n$. Во многих случаях бывает полезно рассмотреть максимальное среди чисел $a_1, a_2, ..., a_n$

Пусть вещественные числа $a, b, c \in [0;1]$. Доказать, что $\frac{a}{bc+1}+\frac{b}{ac+1}+\frac{c}{ab+1} \le 2$

Решение: Можно считать , что a - максимальное среди чисел a, b, c. Тогда

$$\frac{a}{bc+1}+\frac{b}{ac+1}+\frac{c}{ab+1}-2 \le \frac{a}{bc+1}+\frac{b}{bc+1}+\frac{c}{bc+1}-2 =$$

$$= \frac{a+b+c-2bc-2}{bc+1} = \frac{(b-1)(1-c)+(a-1)-bc}{bc+1} \le 0$$

так как в числителе сумма отрицательных слагаемых, а знаменатель дроби положительный.

Пример 2. Введение вспомогательных переменных.

В некоторых неравенствах удачный выбор новых переменных значительно облегчает доказательство.

Пусть $a, b, c > 0$. Доказать, что $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \ge \frac{3}{2}$.

Решение: Обозначим $b+c=x, c+a=y, a+b=z$. Тогда

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} = \frac{1}{2}\left(\frac{x+z-y}{y}+\frac{y+x-z}{z}+\frac{z+y-x}{x}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)+\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right)-3\right) \ge \frac{1}{2}(2+2+2+-3) = \frac{3}{2}$$

В последнем переходе воспользовались неравенством Коши между средним арифметическим и средним геометрическим.

Пример 3. Заключительный этап олимпиады СПбГУ 2013-2014 года.
При оценке некоторой суммы бывает полезно оценить каждое слагаемое в отдельности.

Найдите наименьшее значение выражения $\left(\sqrt[4]{x^4+4}+x-y\right)^2+\left(\sqrt[4]{y^4+4}+y-x\right)^2$

Решение: Раскроем скобки и приведем подобные слагаемые, получим

$$\left(\sqrt[4]{x^4+4}+x-y\right)^2+\left(\sqrt[4]{y^4+4}+y-x\right)^2 =$$

$$= \sqrt{x^4+4}+\sqrt{y^4+4}+2(x-y)\left(x-y+\sqrt[4]{x^4+4}-\sqrt[4]{y^4+4}\right)$$

Первое слагаемое не меньше 2 при любом значении x, и равно 2 при $x=0$
Первое слагаемое не меньше 2 при любом значении y, и равно 2 при $y=0$
Третье слагаемое неотрицательно при любом значении x и y, и равно 0 при $x=y$.

Последнее утверждение покажем, по монотонности функции $f(t)=\sqrt[4]{t^4+4}+t$, которая монотонно возрастает как сумма монотонно возрастающих функций, заметим, что $\left(x-y+\sqrt[4]{x^4+4}-\sqrt[4]{y^4+4}\right)=f(x)-f(y)$

Пусть $x>y$, тогда первая скобка в третьем слагаемом $(x-y)>0$ и

$\left(x-y+\sqrt[4]{x^4+4}-\sqrt[4]{y^4+4}\right)>0$,

пусть $x<y$, тогда первая скобка $(x-y)<0$ и вторая $\left(x-y+\sqrt[4]{x^4+4}-\sqrt[4]{y^4+4}\right)<0$,

т.е. их произведение положительно.

Тогда минимум всей суммы будет достигаться при $x=y=0$

Ответ: 4

Пример 4. Геометрические интерпретации.

Иногда бывает полезно при решении неравенства использовать геометрические интерпретации. Наиболее часто используемые формулы для геометрической интерпретации – это расстояние между точками и расстояние от точки до прямой. Найдите наибольшее и наименьшее значение выражения

$(a-d)^2+(b+p)^2+(c-q)^2$ если числа a,b,c,d,p,q таковы, что $\begin{cases} a^2+b^2+c^2=9 \\ d^2+p^2+q^2=16 \end{cases}$

Решение: Вспомним формулу расстояния между точками в координатах. Пусть даны точки $A(a,b,c)$ и $B(d,-p,q)$. Тогда данное выражение

$(a-d)^2+(b+p)^2+(c-q)^2$ задает квадрат расстояния между точками AB, первая из которых лежит на сфере с центром в начале координат и радиусом 3, вторая на сфере с центром в начале координат и радиусом 4. Наибольшее расстояние между точками этих сфер равно сумме радиусов, т.е. 7, а наименьшее расстояние равно разности радиусов, т.е. 1. Тогда расстояния в квадрате – это 1 и 49. Значение 49 достигается, например, при $a=c=d=q=0, b=3, p=4$. Значение 1 достигается, например, при $a=c=d=q=0, b=3, p=-4$.

Ответ: 1 и 49