Классическое неравенство между средними.

Числа $\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}$, $\sqrt[n]{a_1a_2...a_n}$, $\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}}$, $\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+...+a_n^2}{n}}$ называются соответственно средним арифметическим, средним геометрическим, средним гармоническим и средним квадратическим неотрицательных чисел $a_1, a_2, ..., a_n$.

Все эти четыре средних связаны одной цепочкой неравенств:

$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}} \le \sqrt[n]{a_1a_2...a_n} \le \frac{a_1+a_2+...+a_n}{n} \le \sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+...+a_n^2}{n}}$, причем равенство достигается только в случае $a_1 = a_2 = ... = a_n$.

Вероятно, самой знаменитой теоремой теории неравенств является теорема о том, что среднее арифметическое всегда не меньше среднего геометрического:

$\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n} \ge \sqrt[n]{a_1a_2...a_n}$, $(a_1, a_2, ..., a_n \ge 0)$, причем равенство достигается только в случае $a_1 = a_2 = ... = a_n$.

Для двух чисел это неравенство было известно еще во времена Евклида, неравенство в общем виде появилось значительно позже. Первое упоминание о неравенстве для n чисел относится к 1729 г, когда английский математик К. Макфлорен сформулировал теорему следующим образом: «Если отрезок АВ разделен на несколько частей, то произведение частей будет наибольшим, если они равны между собой». Однако, доказательство Макфлорена было не строгим. В явном виде и со строгим доказательством неравенство было опубликовано в 1821 году французским математиком Огюстом Коши, поэтому неравенство между арифметическим и геометрическим средними обычно называют неравенством Коши.

Пример 1. Заключительный этап олимпиады СПбГУ 2017-2018 года.

Даны положительные числа a, b, c, d. Найдите минимальное значение выражения

$$A = \left(\frac{a+b}{c}\right)^4 + \left(\frac{b+c}{d}\right)^4 + \left(\frac{c+d}{a}\right)^4 + \left(\frac{d+a}{b}\right)^4$$

Решение:

Пусть $x = \left(\frac{a+b}{c}\right)^4$; $y = \left(\frac{b+c}{d}\right)^4$; $z = \left(\frac{c+d}{a}\right)^4$; $t = \left(\frac{d+a}{b}\right)^4$.

По неравенству Коши $\dfrac{x+y+z+t}{4} \geq \sqrt[4]{x \cdot y \cdot z \cdot t}$, т.е. $x+y+z+t \geq 4\sqrt[4]{x \cdot y \cdot z \cdot t}$. Тогда

$$A=\left(\frac{a+b}{c}\right)^4+\left(\frac{b+c}{d}\right)^4+\left(\frac{c+d}{a}\right)^4+\left(\frac{d+a}{b}\right)^4 \geq$$

$$\geq 4\sqrt[4]{\left(\frac{a+b}{c}\right)^4\left(\frac{b+c}{d}\right)^4\left(\frac{c+d}{a}\right)^4\left(\frac{d+a}{b}\right)^4}=$$

$$=4\cdot\left(\frac{a+b}{c}\right)\left(\frac{b+c}{d}\right)\left(\frac{c+d}{a}\right)\left(\frac{d+a}{b}\right) \geq$$

$$\geq 4\cdot\left(\frac{2\sqrt{ab}}{c}\right)\left(\frac{2\sqrt{bc}}{d}\right)\left(\frac{2\sqrt{cd}}{a}\right)\left(\frac{2\sqrt{da}}{b}\right)=64$$

Равенство достигается в случае $a=b=c=d=1$

Ответ: 64.

Отметим, что для решения этой задачи достаточно было дважды применить классическое неравенство Коши. Рассмотрим еще пример.

Пример 2. Пусть $a,b>0$. Доказать, что $2\sqrt{a}+3\sqrt[3]{b} \geq 5\sqrt[5]{ab}$.

Решение: Запишем неравенство Коши для набора из пяти чисел $\sqrt{a},\sqrt{a},\sqrt[3]{b},\sqrt[3]{b},\sqrt[3]{b}$.

$$2\sqrt{a}+3\sqrt[3]{b} \geq 5\sqrt[5]{\left(\sqrt{a}\right)^2\cdot\left(\sqrt[3]{b}\right)^3}=5\sqrt[5]{ab}$$

Для самостоятельного решения:

Даны положительные числа a,b,c,d. Найдите минимальное значение выражения

$$A=\left(a+\frac{1}{b}\right)^3+\left(b+\frac{1}{c}\right)^3+\left(c+\frac{1}{d}\right)^3+\left(d+\frac{1}{a}\right)^3$$

Ответ: 32