

Самостоятельные геометрические интерпретации.

<p>Геометрической основой решения может служить неравенство треугольника: для любых точек А, В, С плоскости выполняется неравенство $AC - BC \leq AB \leq AC + BC$, причем равенство может достигаться только в случае, когда точки лежат на одной прямой.</p> <p>Напомним, что расстояние между точками $A(x_a; y_a)$ и $B(x_b; y_b)$ на координатной плоскости вычисляется по формуле</p> $AB = \sqrt{(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2}$	<ol style="list-style-type: none"> 1) Найдите наименьшее значение функции: $y = \sqrt{(x - 1)^2 + 1} + \sqrt{(x - 4)^2 + 4}$. 2) Решите уравнение: $x\sqrt{1+x} + \sqrt{3-x} = 2\sqrt{1+x^2}$. 3) Найдите решение системы: $\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, & a > 0 \\ z^2 + t^2 = b^2, & b > 0 \end{cases}$ для которого величина $x + z$ принимает наибольшее значение. 4) Трубчатый искусственный кристалл в поперечном сечении имеет фигуру, описываемую неравенством: $4 \leq x^2 + y^2 \leq 2(x + y)$. Построить это сечение и найти его площадь. 5) В треугольнике ABC длины сторон равны 4, 5 и $\sqrt{17}$. Найти площадь фигуры, состоящей из тех точек X внутри треугольника ABC, для которых выполняется условие: $XA^2 + XB^2 + XC^2 \leq 21$. 6) Докажите, что $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = -\frac{1}{2}$. 7) При каких значениях параметра a система $\begin{cases} (x - 4 \cos \alpha)^2 + (y - 4 \sin \alpha)^2 = 1 \\ (x - 5 \cos 2\alpha)^2 + (y - 5 \sin 2\alpha)^2 = 9 \end{cases}$
<p>Геометрической основой решения могут служить метрические теоремы геометрии (теорема Пифагора, теорема косинусов, теорема синусов).</p> <p>Идея геометрического решения возникает исходя из вида выражений, стоящих под знаками корней, например, выражение $\sqrt{1-x^2} + \sqrt{4-y^2} + \sqrt{9-z^2} + \sqrt{16-t^2}$ напоминает теорему Пифагора, а выражение $\sqrt{a^2 - ab + b^2} + \sqrt{b^2 - bc + c^2}$ напоминает теорему косинусов.</p>	<p>Во многих задачах, связанных с доказательством неравенств или поиском экстремальных значений, эффективно применяется следствие из определения скалярного произведения векторов $\vec{a} \cdot \vec{b} \leq \vec{a} \cdot \vec{b}$, которое справедливо в декартовой системе координат любой размерности. Помимо это используется тот факт, что модуль суммы n векторов не превосходит суммы их модулей, причем равенство достигается тогда и только тогда, когда все векторы сонаправлены.</p> <p>Напомним, что если $\vec{a}\{x_a; y_a\}; \vec{b}\{x_b; y_b\}$, то $\vec{a} = \sqrt{x_a^2 + y_a^2}$ и $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b$.</p> <p>Для доказательства ряда тригонометрических тождеств бывает полезен следующий факт: пусть О – центр правильного n-угольника $A_1 A_2 \dots A_n$, тогда $\vec{OA_1} + \vec{OA_2} + \dots + \vec{OA_n} = \vec{0}$</p> <p>Напомним, что расстояние между точками в трехмерном пространстве вычисляется по формуле</p> $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$ <p>Сфера с центром $D(a; b; c)$ и радиусом R задается уравнением $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$, а уравнение плоскости α имеет вид $Ax + By + Cz + D = 0$, где $\vec{n}\{A; B; C\}$ - вектор нормали к плоскости α. Кроме того, если $M(x_0; y_0; z_0)$, то расстояние от точки до плоскости α вычисляется по формуле $M; \alpha = \frac{ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D }{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$</p>