

Домашнее задание.

1. На доске написано 10 различных натуральных чисел. Среднее арифметическое шести наименьших из них равно 7, а среднее арифметическое шести наибольших равно 12. Найдите наибольшее значение среднего арифметического всех чисел.
2. На доске написаны числа 1 и 2. Каждый день Петя заменяет два написанных числа на их среднее арифметическое и среднее гармоническое. Однажды одним из написанных чисел (каким — неизвестно) оказалось $\frac{886731088897}{627013566048}$. Каким в этот момент могло быть другое число?

Решения:

Задача 1

На доске написано 10 различных натуральных чисел. Среднее арифметическое шести наименьших из них равно 7, а среднее арифметическое шести наибольших равно 12. Найдите наибольшее значение среднего арифметического всех чисел.

Решение:

Построим наименьшую возможную сумму первых шести членов последовательности.

$$\begin{array}{cccccccccccc} a_1 & < & a_2 & < & a_3 & < & a_4 & < & a_5 & < & a_6 & < & a_7 & < & a_8 & < & a_9 & < & a_{10} \\ \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{сумма } 42} & \overbrace{\hspace{10em}}^{\text{сумма } 72} \end{array}$$

$$a_1 + (a_1 + 1) + (a_1 + 2) + (a_1 + 3) + (a_1 + 4) + (a_1 + 5) = 6a_1 + 15 \leq 42$$
$$a_1 \leq 4,5$$

Построим пример с наименьшей возможной суммой пятого и шестого членов последовательности

$$4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 39$$

$$42 - 39 = 3$$

$$4 + 5 + 6 + (7 + 1) + (8 + 1) + (9 + 1) = 42$$

Тогда наименьший $a_5 = 9$; $a_6 = 10$ и наибольшая сумма $42 + 72 - (a_5 + a_6) = 114 - (9 + 10) = 95$,

наибольшее среднее арифметическое $\frac{95}{10} = 9,5$.

Построим пример. $4 + 5 + 6 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + (14 + 3)$

Ответ: 9,5 например 4,5,6,8,9,10,11,12,13,17

Задача 2

На доске написаны числа 1 и 2. Каждый день Петя заменяет два написанных числа на их среднее арифметическое и среднее гармоническое. Однажды одним из написанных чисел (каким — неизвестно) оказалось $\frac{886731088897}{627013566048}$. Каким в этот момент могло быть другое число?

Решение:

$$a, b > 0$$

$$\frac{a+b}{2} \cdot \frac{2ab}{a+b} = ab$$

Тогда какие бы числа не оказались на доске, их произведение — инвариант.

$$a = 1; \quad b = 2$$

$$a \cdot b = 1 \cdot 2 = 2$$

В нашем случае, произведение всегда равно 2.

Тогда

$$\frac{886731088897}{627013566048} \cdot x = 2$$

$$x = 2 \cdot \frac{627013566048}{886731088897}$$

$$\text{Ответ: } 2 \cdot \frac{627013566048}{886731088897}$$