

«Так как здание всего мира совершенно и возведено премудрым Творцом, то в мире не происходит ничего, в чем не был бы виден смысл какого-нибудь максимума или минимума».

Леонард Эйлер

1.	В треугольнике $ABC$ угол $C$ прямой, угол $A$ равен $\alpha$ , гипотенуза имеет длину 1. Найдите множество значений, которые может принимать периметр $P(\alpha)$ треугольника $ABC$ .
2.	Найдите угол при вершине равнобедренного треугольника, имеющего наибольшую площадь при данном постоянном радиусе описанной около треугольника окружности.
3.	Длины двух медиан треугольника 2 и 3. В каких пределах может изменяться длина третьей медианы? При каком ее значении площадь треугольника максимальна, и каково при этом значение площади?
4.	Против одного из углов треугольника лежит сторона длиной 13, тогда как сумма длин двух других сторон равна 17. В каких пределах может изменяться длина $l$ биссектрисы этого угла? При каком значении $l$ площадь треугольника максимальна и каково при этом значение площади?
5.	Длины двух высот треугольника $2\sqrt{3}$ и 2. В каких пределах может изменяться длина третьей высоты? При каком ее значении площадь треугольника максимальна, и каково при этом значение площади?
6.	В трапецию с основаниями, равными 7 и 28, и боковыми сторонами, равными 13 и 20, вписан прямоугольник наибольшей площади, причем две вершины его принадлежат большему основанию, а две другие – боковым сторонам трапеции. Найдите площадь такого прямоугольника.

Возможно, для решения задач будут полезны следующие факты:

$$\sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{2} \sin \left( \alpha + \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \cos \left( \alpha - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\sin \alpha - \cos \alpha = \sqrt{2} \sin \left( \alpha - \frac{\pi}{4} \right) = -\sqrt{2} \cos \left( \alpha + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$A \sin \alpha + B \cos \alpha =$$

$$= \begin{cases} \sqrt{A^2 + B^2} \cdot \sin \left( \alpha + \arctg \frac{A}{B} \right) & \text{если } B > 0 \\ -\sqrt{A^2 + B^2} \cdot \sin \left( \alpha + \arctg \frac{A}{B} \right) & \text{если } B < 0 \\ \sqrt{A^2 + B^2} \cdot \cos \left( \alpha - \arctg \frac{B}{A} \right) & \text{если } A > 0 \\ -\sqrt{A^2 + B^2} \cdot \cos \left( \alpha - \arctg \frac{B}{A} \right) & \text{если } A < 0 \end{cases}.$$

$$m_a^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}$$

$$l_a^2 = bc - b_a c_a$$

$$l_a = \frac{2bc}{b+c} \cos \frac{\alpha}{2}$$