

Графы. Деревья. Учебная деятельность и решения.

Определение 1. Граф называется связным если из любой его вершины по ребрам можно дойти до любой другой.

Определение 2. Деревом называется связный граф без циклов.

Теорема (свойства деревьев):

а) В дереве с n вершинами ровно $n-1$ ребро.

б) Если в связном графе $n-1$ ребро, то это – дерево.

1. Какие из этих графов являются деревьями?

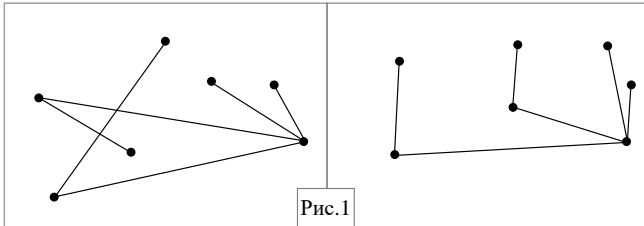


Рис.1

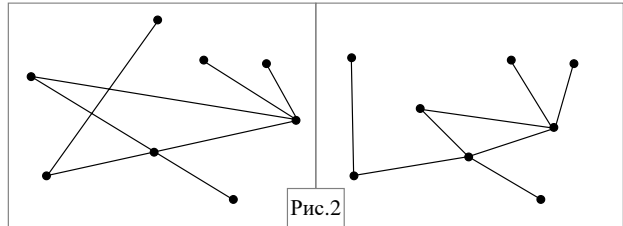


Рис.2

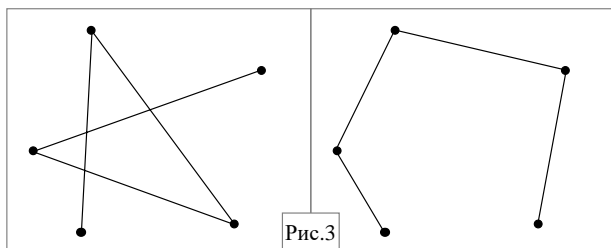


Рис.3

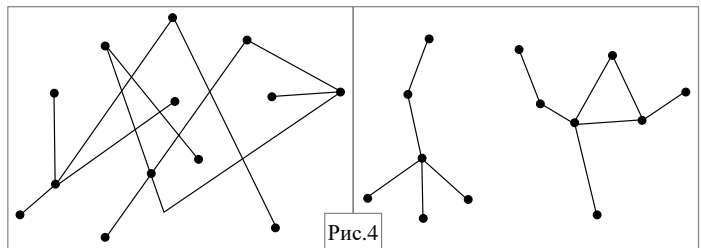


Рис.4

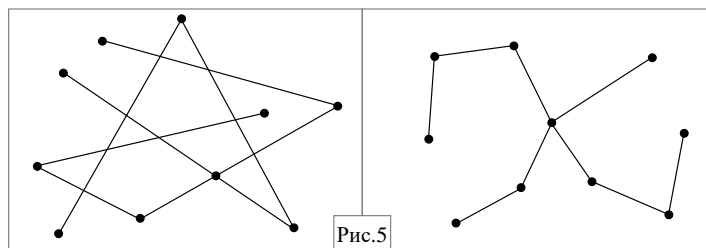


Рис.5

Ответ. Деревья на рисунках 1, 3 и 5.

2. В некоторой стране 30 городов, причем каждый соединен с каждым дорогой. Какое наибольшее число дорог можно закрыть на ремонт так, чтобы по оставшимся дорогам из каждого города можно было проехать в каждый?

Ответ. Можно закрыть 406 дорог.

Решение. Найдем ответ на другой вопрос. Сколько дорог можно оставить? Схема дорог соединяющих города страны – граф. Вершины в этом графе – города, ребра – дороги. Закрывать дороги, значит выкинуть ребра из графа. Чтобы по оставшимся дорогам из каждого города можно было проехать в каждый, граф должен быть связным. Если в графе есть фрагмент - цикл, то из него можно «разорвать», т.е. выкинуть из цикла одно ребро, все равно останется связный граф. Таким образом, в минимальном случае останется связный граф без циклов – то есть дерево. Так как в дереве ребер на одно меньше чем вершин, то останется 29 дорог.

В стране каждый город соединен с каждым, т.е. дорог в нем $\frac{30 \cdot 29}{2} = 435$. Закрывать можно $435 - 29 = 406$.

3. В графе все вершины имеют степень 3. Докажите, что в нем есть цикл.

Доказательство (от противного). Пусть в нашем графе n вершин степени 3 и он без циклов. Наш граф является либо деревом если он связный, либо же он состоит из нескольких деревьев, т.е. в любом случае ребер в нем меньше чем вершин. Так как все

вершины степени 3, то в графе $\frac{3n}{2}$ ребер. Значит, $\frac{3n}{2} < n$. Тогда $n < 0$, но количество вершин не может быть отрицательным числом, получили противоречие. Наше предположение не верно, т.е. не существует графа без циклов, в котором каждая вершина степени 3.

4. Волейбольная сетка имеет вид прямоугольника размером 50×200 клеток. Какое наибольшее число веревочек можно перерезать так, чтобы сетка не распалась на куски?

Ответ. Разрезать можно 10000 веревочек.

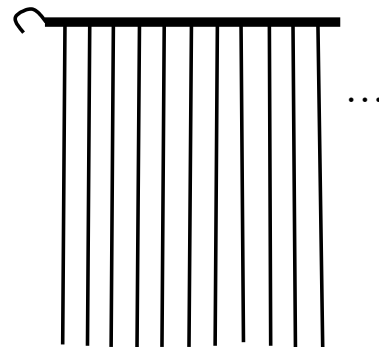
Решение 1. Поступим аналогично решению задачи 2. Сколько веревочек на сетке останется? Узлы сетки – вершины графа, веревочки – ребра. Останется связный граф без циклов, т.е. дерево. Узлов на сетке $201 \cdot 51$, значит останется $201 \cdot 51 - 1$ веревочка. Посчитаем количество веревочек-ребер (сторон клеток). Вертикальных сторон будет $50 \cdot 201$, а горизонтальных $51 \cdot 200$, т.о. всего ребер $51 \cdot 200 + 50 \cdot 201$.

Значит, перерезать можно

$$(51 \cdot 200 + 50 \cdot 201) - (201 \cdot 51 - 1) = 51 \cdot 200 - 200 = 50 \cdot 200 = 10000 \text{ веревочек.}$$

Решение 2. Мы знаем, что наименьшее число ребер будет в дереве, причем в любом дереве одинаковое. Поэтому сделаем произвольное дерево, посчитав, сколько ребер разрезали.

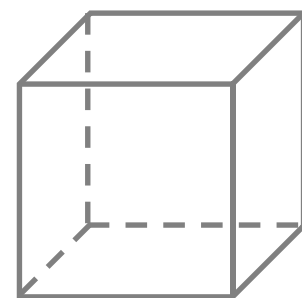
Разрежем все горизонтальные ребра, кроме самого верхнего в своем столбце (оно толстое, его сложнее резать). Мы разрезали $200 \cdot 50 = 10000$ ребер. Осталось дерево, т.к. нет циклов.



5. Можно ли раскрасить ребра куба в два цвета так, чтобы по ребрам каждого цвета можно было пройти из любой вершины в любую?

Ответ. Нельзя так покрасить ребра.

Решение. Чтобы по ребрам одного цвета можно было попасть из каждой вершины в каждую нужно, чтобы одноцветные ребра образовывали связный граф. В кубе 8 вершин, значит, в одноцветном графе будет не меньше 7 ребер. Так как таких одноцветных графа должно быть 2, то в кубе должно быть не меньше 14 ребер, а в нем всего 12 ребер.



6. У Царя Гвидона было 5 сыновей. Среди его потомков 100 имели каждый ровно по 3 сына, а остальные умерли бездетными. Сколько потомков было у царя Гвидона?

Ответ: 305.

Решение 1. Схему родственных отношений семьи Гвидона можно представить в виде графа. Вершины графа – Гвидон и потомки, ребра – родственная связь «отец-сын». Этот граф будет деревом (в нем нет циклов так как у человека не может быть двух отцов). В этом графе будет $5 + 3 \cdot 100 = 305$ ребер «отец-сын». Так как этот граф – дерево, то в нем 306 вершин (одна из вершин – Гвидон). Значит потомков у Гвидона – 305.

Решение2. Пусть всего было n потомков. Из них 100 имели по 3 сына, а остальные $n - 100$ – умерли бездетными. Нарисуем соответствующий граф (двух людей соединим ребром, если один из них отец другого). В этом графе $n+1$ вершина (кроме потомков есть еще сам Гвидон). Посмотрим сколько от вершин отходит ребер. От Гвидона ведет 5 ребер, от $n - 100$ вершин ведет всего по одному ребру (т.к. они умерли бездетными, то есть только одно ребро, ведущее к отцу), и еще от 100 вершин ведет по 4 ребра (три ребра к сыновьям и одно

$$\frac{5 + n - 100 + 4 \cdot 100}{2} = \frac{n + 305}{2}$$

к отцу). Посчитаем, сколько всего ребер: $\frac{n + 305}{2}$. Но, с другой стороны, этот граф – дерево, поэтому ребер в нем должно быть на 1 меньше, чем вершин,

$$\frac{n + 305}{2} = n$$

т.к. вершин $n+1$, то ребер n . Получили уравнение, откуда $n=305$.

7. В стране 15 городов, некоторые из них соединены авиалиниями, принадлежащими трем авиакомпаниям. Известно, что даже если любая из авиакомпаний прекратит полеты, можно будет добраться из любого города в любой другой (возможно, с пересадками), пользуясь рейсами оставшихся двух компаний. Какое наименьшее количество авиалиний может быть в стране?

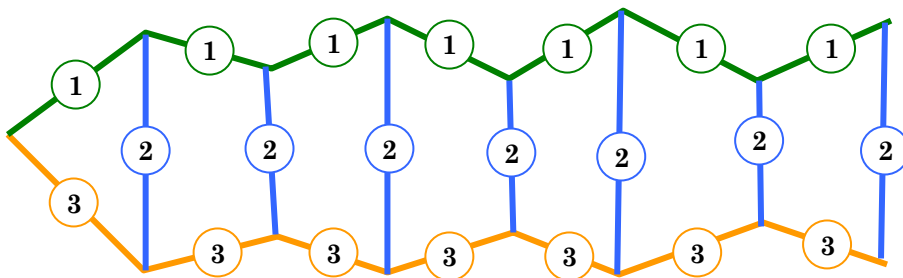
Ответ: 21.

Решение. Пусть компании обслуживают k , l и m рейсов соответственно. Если выключить первую компанию, останется $(l + m)$ рейсов, и это не меньше, чем 14, **раз страна осталась связной. Аналогично для других пар: $(l + k) \geq 14$, $(m + k) \geq 14$.** Сложим эти неравенства, получим:

$$(k + l) + (l + m) + (m + k) \geq 42$$

$$k + l + m \geq 21$$

Мы доказали, что количество рейсов не меньше, чем 21. Теперь построим пример на 21 рейс:



8. Деревни некоторой языческой страны соединены дорогами так, что от любой деревни можно добраться до любой другой не проходя ни через какую деревню дважды, причём сделать это можно единственным способом. В каждой деревне живет свое племя туземцев. Каждое племя поклоняется одному из трёх идолов: Камню, Ножницам или Бумаге. Известно, что Камень сильнее Ножниц, Ножницы сильнее Бумаги, а Бумага сильнее Камня. Каждое племя желает, чтобы их идол был не слабее, чем идол любого из соседствующих с ними племен. С этой целью каждый вечер ровно в 20:24 каждое племя смотрит на своих соседей и, если обнаруживает соседа с более сильным идолом, меняет свои верования, начиная поклоняться этому более сильному идолу. Верно ли, что рано или поздно все племена начнут верить в одного и того же идола?

Переформулируем условие задачи на язык графов. Каждому племени поставим в соответствие вершину, между любыми двумя соседними проведем ребро. Для каждой вершины определен ее идол, если идол соседней вершины сильнее, то в этот день вершина меняет своего идола на более сильного.

Будем решать задачу индукцией по количеству вершин. База индукции для графа, состоящего из одной вершины, очевидна.

Докажем, что если условие задачи верно для некоторого натурального n , то оно же верно для $n + 1$. Выберем висющую вершину A исходного дерева, родителем которой является вершина B .

Будем говорить, что вершина X влияет на вершину Y , если данные вершины являются соседями и идол X сильнее идола Y , при этом Y не имеет соседа с более сильным идолем, отличным от X .

Если не существует дня, в котором вершина A влияло на вершину B . В графе, полученном из данного удалением вершины A , по предположению индукции все вершины через несколько дней будут иметь одного и того же идола, в частности его же будет иметь вершина B , а значит и вершина A .

Предположим, что существует день, в котором A повлияло на B . После этого дня вершины A и B имеют одинакового идола.

Теперь, если вершина B меняет идола на более сильного, то на следующий день A так же начинает поклоняться этому идолу, а значит не наступит дня, в котором A имело бы более сильного идола, следовательно A больше никогда не повлияет на B , тем самым мы можем применить рассуждения, сделанные ранее, для дня, после которого вершина A повлияла на B .

Высшая проба - 2024, 11.5 (см. olymp.hse.ru)

Подсказка 1

Если видите в задаче ребят и дружеские связи, города, дороги и тому подобное, то сразу же переводите задачу на язык графов, так с ней намного удобнее будет работать. Обозначим города за вершины, а дороги между ними за ребра. Поверим в лучшее и попробуем доказать, что всё-таки все вершины будут иметь одного идола в конце. Подумайте над тем, какой перед нами граф и как он поможет нам в доказательстве.

Подсказка 2

В условии сказано, что существует единственный простой путь (без повторения вершин) между любыми двумя вершинами, значит, перед нами граф-дерево, а у такого графа есть «листья» (вершина, у которой есть только один «сосед»).

Попробуйте доказать необходимое утверждение по индукции, рассмотрев граф на n вершин, для которого оно выполняется, а шагом индукции пусть будет добавление «листа».

Подсказка 3

Возьмем две вершины нашего графа, вершину A – лист, вершину B – родитель вершины A (единственный её «сосед»). Рассмотрите два случая, когда вершина B не меняла своего идола на идола вершины A и когда меняла. Если в каждом из случаев в графе идолы всех вершины становятся одинаковыми, то мы доказали утверждение.

Подсказка 4

Пусть B не меняла своего идола на идола вершины A , значит, либо идол B сильнее идола вершины A , либо их идолы равны. В каждом из этих случаев в один момент идолы вершин A и B будут равны, а по предположению индукции и весь граф будет иметь одинаковых идолов. Осталось аналогичным способом рассмотреть случай, когда B поменяла своего идола на идола вершины A .