

Самостоятельная графомания.

1. На вечеринке собралось 24 человека. Гость считается <i>интровертом</i> , если у него не более трех знакомых среди остальных гостей. Оказалось, что у каждого гостя не менее трёх знакомых-интровертов. Какое количество интровертов могло быть на вечеринке? (Приведите все ответы и докажите, что других нет)	Лемма о рукопожатиях
2. В городе Джентльвилле живут 15 джентльменов, любые двое из которых либо дружат, либо враждуют. В какой-то момент каждый джентльмен попросил каждого из своих друзей послать открытку ненависти каждому из своих врагов (джентльмен А просит джентльмена В послать открытку всем врагам джентльмена В). Каждый из джентльменов выполнил все просьбы; при этом он посылал каждому из своих врагов такое количество открыток, сколько раз его об этом просили. Какое наибольшее количество открыток могло быть послано?	
3. Грани куба $5 \times 5 \times 5$ разбиты на клетки со стороной 1. Каждую клетку покрасили в красный, жёлтый или зелёный цвет так, что клетки, имеющие общую сторону, покрашены в разные цвета. Какое наименьшее количество красных клеток могло быть?	Двудольный граф. Определение: граф называется двудольным, если множество его вершин можно так разбить на два подмножества (доли), чтобы каждое ребро соединяло вершины из разных подмножеств.
4. Чемпионат по футболу проходил в два круга. В каждом круге каждая команда сыграла с каждой один матч (за победу даётся три очка, за ничью одно, за поражение ноль). Оказалось, что все команды вместе набрали в первом круге 60% от общей суммы всех очков за два круга. Известно также, что победитель чемпионата набрал во втором круге в 30 раз меньше очков, чем все команды вместе в первом круге. Сколько команд участвовало в турнире?	
5. Про натуральные числа X , Y и Z известно, что они различны и не превосходят 100. Мы можем выписать любую последовательность $\{a_1, a_2, \dots, a_{100}\}$, содержащую все натуральные числа от 1 до 100. Какое наименьшее число последовательностей нужно выписать, чтобы среди них наверняка имелась такая, в которой два или три подряд идущих члена принадлежат множеству $\{X; Y; Z\}$?	
6. Промежуток из одного или несколько подряд идущих дней назовём нечётным, если нечётное число из этих дней были дождливыми. Каково наибольшее возможное число нечётных промежутков в июле?	
7. В группе из 80 человек некоторые знакомы друг с другом (знакомства взаимны). Известно, что в группе есть человек, который знает ровно 1 из оставшихся, человек, который знает ровно 2 из оставшихся, ..., человек, который знает ровно 54 из оставшихся. Докажите, что в группе есть три человека, каждые два из которых знакомы.	

Решения.

1) На вечеринке собралось 24 человека. Гость считается *интровертом*, если у него не более трех знакомых среди остальных гостей. Оказалось, что у каждого гостя не менее трёх знакомых-интровертов. Какое количество интровертов могло быть на вечеринке? (Приведите все ответы и докажите, что других нет)

Решение: Заметим, что у каждого гостя есть хотя бы по три знакомых интроверта, поэтому интроверты точно есть. Но посмотрим на любого интроверта: у него должно быть хотя бы три знакомых интроверта, но при этом не более трёх знакомых всего (больше у интроверта быть не может). Значит, у каждого интроверта ровно три знакомых, причём все они также интроверты.

Предположим, что на вечеринке есть человек, который не считается интровертом. По условию у него должно быть в друзьях хотя бы три интроверта. Но только что мы показали, что знакомые интроверта обязаны быть интровертами. Значит, предположение неверно. На вечеринке при заданных условиях задачи все должны быть интровертами, а другой ситуации быть не могло.

Осталось привести пример с 24 интровертами. Давайте расположим всех их в вершинах правильного 24-угольника и проведём его главные диагонали. То есть интроверт в каждой из вершин будет соединён с соседями и противоположной вершиной.

Замечание. Однако при нечётном количестве участников вечеринки пример не удаётся построить, поскольку графа с нечётным количеством вершин нечётной степени не существует по лемме о рукопожатиях.

2) В городе Джентльвилле живут 15 джентльменов, любые двое из которых либо дружат, либо враждуют. В какой-то момент каждый джентльмен попросил каждого из своих друзей послать открытку ненависти каждому из своих врагов (джентльмен А просит джентльмена В послать открытку всем врагам джентльмена В). Каждый из джентльменов выполнил все просьбы; при этом он посылал каждому из своих врагов такое количество открыток, сколько раз его об этом просили. Какое наибольшее количество открыток могло быть послано?

Решение:

Подсказка 1!

1) Так, было бы здорово оценить количество открыток как-то, в зависимости от количества друзей, чтобы попробовать посчитать максимум..... Например, если у человека друзей будет x , а врагов соответственно $14-x$, то сколько открыток он пошлет?

Подсказка 2!

2) Так, хорошо, $x(14-x)$! Нужно понять, где это выражение принимает максимум, и проверить, получится ли наш максимум достигнуть... Было тут у нас какое-то утверждение про степени вершин в графе... Хм...

Подсказка 3!

3) Ага, вот оно! Лемма о рукопожатиях! Теперь идейно задачу решили, осталось только немного разобраться, как все же получить новый максимум!

Рассмотрим полный граф на 15 вершинах, вершинами которого являются джентльмены, а рёбрами — отношения между ними. Покрасим между двумя вершинами в белый цвет, если джентльмены, соответствующие этим вершинам дружат. А чёрные ребра будут символизировать вражду между людьми.

Оценка. \leq

Пусть у джентльмена с номером N ($1 \leq N \leq 15$) ровно X_N друзей и $14 - X_N$ врагов. Тогда он отправил ровно

$X_N \times (14 - X_N)$ писем. Это выражение является квадратным трёхчленом, наибольшее значение которого достигается при $X_N = 7$ и равно 49. Тогда число отправленных всеми джентльменами писем не превосходит 49×15

Покажем, что отправить ровно 49×15 писем невозможно по лемме о рукопожатиях (в любом графе количество вершин нечётной степени чётно). Действительно, в таком случае у каждого джентльмена должно быть 7 друзей и 7 врагов. Рассмотрим подграф из всех вершин и только белых рёбер. В этом подграфе количество рёбер (количество пар друзей среди джентльменов) равно половине от суммы степеней вершин (у каждого по 7 друзей, но одну и ту же пару считаем дважды), то есть $7 \times 15 : 2$. Противоречие с тем, что это число должно быть целым.

Пример.

Покажем, что отправить $49 \times 15 - 1$ писем возможно. Достаточно построить “чёрный” подграф: нужно соединить каждого джентльмена с тремя следующими — получим однородный граф степени 6 затем останется соединить каких-то 7 подряд с джентльменами, которые идут на 7 позиций позже по кругу. То есть $1 \iff 8, 2 \iff 9 \dots 7 \iff 14$ Тогда степени первых 14-и вершин станут равны 7 а у 15-й она останется равной 6

Ответ: 734

3) Грани куба $5 \times 5 \times 5$ разбиты на клетки со стороной 1. Каждую клетку покрасили в красный, жёлтый или зелёный цвет так, что клетки, имеющие общую сторону, покрашены в разные цвета. Какое наименьшее количество красных клеток могло быть?

Решение:

Решение: Три квадрата при вершине куба образуют цикл соседних квадратов длины 3. Вокруг него образуется ещё один цикл длины 9 из соседних клеток. А вокруг него — цикл длины 15. Взяв вокруг двух противоположных вершин куба по три таких цикла, а вокруг остальных вершин — по два малых цикла, получим 18 непересекающихся нечётных циклов. Поскольку нечётный цикл в два цвета правильно покрасить нельзя, каждый из них содержит красную клетку.

Пример. Красим 4 боковые грани куба в шахматном порядке в жёлтый и зелёный. В основаниях красим главные диагонали красным, остальное докрашиваем в шахматном порядке жёлтым и зелёным.

Ответ: 18

4) Чемпионат по футболу проходил в два круга. В каждом круге каждая команда сыграла с каждой один матч (за победу даётся три очка, за ничью одно, за поражение ноль). Оказалось, что все команды вместе набрали в первом круге 60% от общей суммы всех очков за два круга. Известно также, что победитель чемпионата набрал во втором круге в 30 раз меньше очков, чем все команды вместе в первом круге. Сколько команд участвовало в турнире?

Подсказка 1

Если в первом туре они набрали 60% от общей суммы очков, то выходит во втором туре они набрали 40% от общего числа очков. То есть в первом круге они набрали в 1,5 раза больше чем во втором. Как-будто это очень немало. Отсюда, хотелось бы сделать оценку на количество очков набранных за один тур.

Подсказка 2

Давайте посмотрим на один матч. За каждый матч суммарно команды получили либо 2, либо 3 очка. Но в таком случае, так как количество игр равно $n(n-1)/2$, где n - количество команд, то как мы можем оценить суммарное кол-во очков?

Подсказка 3

Верно, мы можем оценить, что количество очков за один тур расположено от $2 \cdot n(n-1)/2$ до $3 \cdot n(n-1)/2$. Значит, если количество очков в двух турах отличается в 1,5 раза, то так как во втором туре хотя бы $2 \cdot n(n-1)/2$, а в первом не более $3 \cdot n(n-1)/2$, то их отношение хотя бы $3/2$. При этом, понятно, что тогда в первом туре ровно $3n(n-1)/2$ очков, а во втором ровно $2n(n-1)/2$. Но тогда, в первом туре ничьей не было, а во втором все сыграли в ничью. Осталось только применить это знание и факт того, что победитель во втором туре набрал в 30 раз меньше очков чем все суммарно в первом и получить ответ.

Решение:

Пусть в турнире участвовало n команд. Заметим, что в каждом матче две команды в сумме получают 2 или 3 очка. Значит, общее количество очков, которые могут набрать все команды в одном круге, не меньше, чем $2n(n-1)/2$, и не больше, чем $3n(n-1)/2$. Из условия следует, что все команды вместе набрали в первом круге ровно в полтора раза больше очков, чем во втором (60% всех очков в первом круге и 40% во втором). Но это возможно лишь в случае, если в первом круге все матчи закончились победой одной из команд (общая сумма очков $3n(n-1)/2$), а во втором - ничьей (общая сумма очков $2n(n-1)/2$). Значит, победитель набрал во втором круге $(n-1)$ очко. По условию, $3n(n-1)/2 = 30(n-1)$, откуда находим $n=20$.

5) Про натуральные числа X , Y и Z известно, что они различны и не превосходят 100. Мы можем выписать любую последовательность $\{a_1, a_2, \dots, a_{100}\}$, содержащую все натуральные числа от 1 до 100. Какое наименьшее число последовательностей нужно выписать, чтобы среди них наверняка имелась такая, в которой два или три подряд идущих члена принадлежат множеству $\{X; Y; Z\}$?

1)

Подсказка 1

Для начала нужно понять, как вообще подступаться к такой задаче. Через что её решать? У нас есть числа, и мы рассматриваем, стоят ли они подряд в последовательностях. Какая вещь помогает рассмотреть отношения между какими-то объектами?

Подсказка 2

Это графы! Пусть у нас есть какое-то количество последовательностей. Вершины графа - это числа от 1 до 100, а рёбра между вершинами x и y проводятся, если в одной из последовательностей числа x и y были подряд идущими членами. Теперь надо понять, при каком наименьшем числе последовательностей обязательно не найдется тройки, внутри которой нет рёбер.

Подсказка 3

Если сложно угадать число, попробуйте рассмотреть ситуацию, когда у нас n последовательностей. Как тогда можно оценить степени вершин?

Подсказка 4

В каждой последовательности число соседствует не более чем с двумя другими числами, то есть степень каждой вершины не превосходит 2n. Подумайте, при каком наименьшем n в любой тройке вершин будет хотя бы одно ребро. Это и будет ответом на задачу. И не забудьте про пример!

Сначала покажем, что 24 последовательностей не хватит.

Построим граф, вершины которого это числа от 1 до 100, а рёбра между вершинами a и b проводятся, если в одной из последовательностей числа a и b были подряд идущими членами.

Так как суммарно во всех 24-х последовательностях каждое число будет соседом не более $2 \cdot 24 = 48$ других чисел, степень каждой вершины в этом графе не превосходит 48.

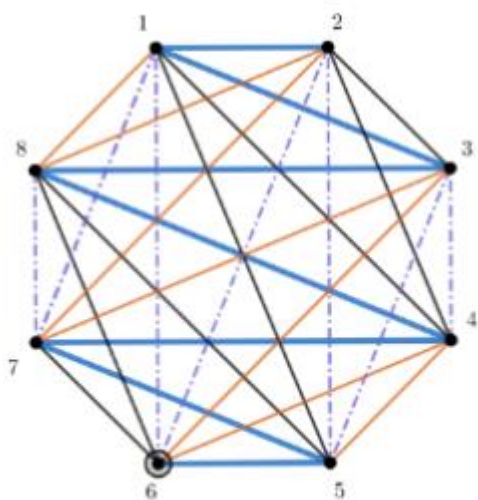
Тогда выберем в графе две несмежные вершины x, y . Так как степень каждой из них не более 48, а всего вершин 100, то найдется хотя бы 1 вершина z , которая не соседствует с обеими вершинами x, y . Тогда множество чисел $\{x, y, z\}$ не будет удовлетворять условию задачи (ни в одна последовательности нет двух или трех подряд идущих членов, которые содержатся в $\{x, y, z\}$)

Пример на 25 последовательностей опишем пример в терминах графа.

Разделим 100 чисел на две равные группы: например, $1, 2, 3, \dots, 50$ и $51, 52, \dots, 100$.

Отдельно расставим первые 50 чисел в 25 последовательностей длиной 50, чтобы любые 2 числа были соседями в хотя бы одной из 25 последовательностей. (То есть на языке графов: нужно покрыть 25 путями полный граф на 50 вершинах). И аналогично поступим со второй группой 50 чисел, а потом просто “склеим” последовательности. Например, если первая последовательность в первой группе это $1, 2, \dots, 50$, а первая последовательность во второй - это $51, 52, \dots, 100$, то склеиваем и получаем $1, 2, \dots, 50, 51, 52, \dots, 100$.

Опишем построение 25 последовательностей длиной 50. Поместим вершины в правильный многоугольник и покроем полный граф на этом подмножестве вершин 25 последовательностями (то есть путями проходящими по всем вершинам), идущими зигзагом через многоугольник с поворотом каждого пути на кратный $\frac{\pi}{n-1}$ угол. На картинке пример построения 4 последовательностей, для 8 чисел:



Теперь поясним, почему после "склейки" полученные 25 последовательностей будут удовлетворять условию. Какие бы числа X, Y, Z , мы ни взяли, либо два из них будут среди чисел от 1 до 50, либо среди чисел от 50 до 100. Тогда два числа из одной группы соединены ребром, то есть являются соседями в одной из 25 последовательностей. Этого мы и добивались.

- б) Промежуток из одного или несколько подряд идущих дней назовём нечётным, если нечётное число из этих дней были дождливыми. Каково наибольшее возможное число нечётных промежутков в июле?**

Решение

Назовём префиксом какое-то количество первых дней июля. Всего префиксов 32 (может быть префикс из 0 дней). Тогда любой промежуток является разностью двух префиксов. Нетрудно понять, что промежуток будет нечётным, если он является разностью префиксов разной чётности.

Рассмотрим граф, в котором вершинами являются префиксы. Ребром соединим префиксы, у которых разная чётность. Получился двудольный граф, в котором 16 вершин соответствуют чётным префиксам и 16 — нечётным. В двудольном графе не более $16 \times 16 = 256$ рёбер. То есть всего не более 256 промежутков. В качестве примера можно сделать все дни дождливыми.

7) В группе из 80 человек некоторые знакомы друг с другом (знакомства взаимны). Известно, что в группе есть человек, который знает ровно 1 из оставшихся, человек, который знает ровно 2 из оставшихся, ..., человек, который знает ровно 54 из оставшихся. Докажите, что в группе есть три человека, каждые два из которых знакомы.

Подсказка 1

Зачастую в задачах на знакомства, на какие-то дороги, где нам даны количества "соединений", удобнее всего начинать с объекта, у которого их больше всех) Попробуем рассмотреть всех знакомых человека А, у которого их 54, что можно о них сказать?

Подсказка 2

Чего же мы хотим добиться от такого множества? Найти человека В в нём, у которого с А точно есть общий знакомый. Но чтобы найти такого В, нужно хотя бы понимать, сколько у него знакомых. Но далеко не обо всех людях мы знаем количество их друзей :(Значит, попробуем сократить множество, в котором будем искать такого В. О скольких людях в множестве друзей А мы точно знаем количество знакомых?

Подсказка 3

В множестве знакомых А максимум 26 человек, у которых мы не знаем количество друзей, значит, есть как минимум 28 человек, про которых мы можем что-то сказать. Какого тогда человека мы можем "выцепить" оттуда, чтобы, наконец, найти В из подсказки 2?

Подсказка 4

Среди них есть человек В, у которого хотя бы 28 знакомых! Осталось лишь доказать, почему же у В и А обязательно есть общий знакомый из всех, при условии, что они знакомы между собой?)

Посмотрим на человека А, который знает ровно 54 из оставшихся. Из них максимум 26 людей, про количество знакомых у которых в условии ничего не сказано. Осталось как минимум 28 человек, про количество знакомых которых сказано в условии. Среди них тогда найдётся человек В, количество знакомых которого хотя бы 28

У А кроме В есть ещё 53 знакомых, а у В, кроме А ещё 27. Поскольку $53+27=80>78$ то у А и В есть хотя бы один общий знакомый С. Тройка А,В,С и есть искомая тройка человек.