

1) В дереве 27 вершин. Сколько в нём ребер?

26 штук

2) Дан граф с 6 вершинами. Степени 5 из них таковы: 5,5,5,4,5. Какова степень шестой вершины? Существует ли в этом графе Эйлеров путь?

Эйлерова пути нет, т.к. нечетных вершин больше 2. Степень шестой вершины 4, т.к. она соединена со всеми, кроме одной

3) Дан граф с 5 вершинами. Известно, что в нем существует Эйлеров путь. Степени 4 вершин таковы: 4,4,4,3. Какова степень шестой вершины?

Степень нечетная, и она не менее 3. Значит, ровно 3.

4) В стране из любого города выходит 100 дорог и от любого города можно добраться до любого другого. Одну дорогу закрыли на ремонт. Докажите, что и теперь от любого города можно добраться до любого другого.

Пусть закрыта дорога АВ. Достаточно доказать, что и после закрытия можно добраться из А в В. (Так как если удаление ребра не повлияло на возможность добраться из А в В, то и на другие пути оно не повлияло, т.к. если какой-то путь (L) включал в себя ребро АВ, можно теперь заменить это ребро на альтернативный путь из А в В, и тогда путь L продолжит существовать)

Если из А в В добраться нельзя, то А и В в разных компонентах связности, и в компоненте связности, содержащей А, все вершины, кроме А, – чётные (по условию). Но наличие ровно одной нечётной вершины противоречит тому, что сумма степеней вершин графа (или подграфа) четная.

5) Докажите, что в каждой компании из шести человек найдутся либо три попарно знакомых, либо три попарно незнакомых человека.

Нарисуем разными цветами ребра знакомств и незнакомств. Тогда требуется доказать, что найдется одноцветный треугольник. Рассмотрим любую вершину. Из неё исходит не менее 3 ребер одного цвета, и они ведут к трем другим вершинам. Если среди этих трёх какие-то две соединены ребром того же цвета, то треугольник найден. Если нет, значит эти три вершины соединены между собой рёбрами другого цвета, одного и того же (так как цветов всего 2. Не этот - значит, другой). И значит, эти три вершины есть вершины одноцветного треугольника, и он найден.