

Разные приемы при решении неравенств.

1. *Выделение полного квадрата.* Пусть a, b, c, d - вещественные числа. Доказать, что

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq (a + b + c) \cdot d$$

2. *Максимальное число.* Доказать, что $\frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ac+1} + \frac{c}{ab+1} \leq 2$

3. *Введение вспомогательных переменных.* Пусть $a, b, c > 0$. Доказать, что

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

4. *Тригонометрическая замена.* Найти наибольшее значение выражения

$$x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}, \text{ где } x, y \in [-1; 1].$$

5. *Промежуточная оценка.* Докажите неравенство

$$1 < \frac{a}{d+a+b} + \frac{b}{a+b+c} + \frac{c}{b+c+d} + \frac{d}{c+d+a} < 2 \text{ для любых положительных } a, b, c, d.$$

Задачи для самостоятельного решения.

1. Пусть a, b - вещественные числа. Доказать, что $a^2 + b^2 + \frac{1}{a^2} + \frac{b}{a} \geq \sqrt{3}$

2. Пусть a, b, c - положительные числа. Доказать, что

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a)$$

3. Пусть a, b, c - стороны треугольника. Доказать, что $\frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{a+c-b} + \frac{c}{a+b-c} \geq 3$

4. Докажите неравенство $-\frac{1}{2} \leq \frac{(x+y)(1-xy)}{(1+x^2)(1+y^2)} \leq \frac{1}{2}$ для любых положительных x, y .

5. Пусть a, b, c - положительные числа; $p = a + b + c$, $q = ab + bc + ca$. Доказать, что

$$\max(a, b, c) - \min(a, b, c) \leq \sqrt{\frac{4}{3}(p^2 - 3q)}$$

Домашнее задание:

1. Пусть a, b, c - вещественные числа. Доказать, что $a^4 + b^4 + c^2 + 1 \geq (ab^2 - a + c + 1) \cdot 2a$

2. Пусть вещественные числа $a, b, c \in [0; 1]$. Доказать, что

$$2(a^3 + b^3 + c^3) - (a^2b + b^2c + c^2a) \leq 3$$

3. Даны числа x, y , удовлетворяющие условию $x^8 + y^8 \leq 1$. Докажите неравенство

$$x^{12} - y^{12} + 2x^6y^6 \leq \frac{\pi}{2}$$