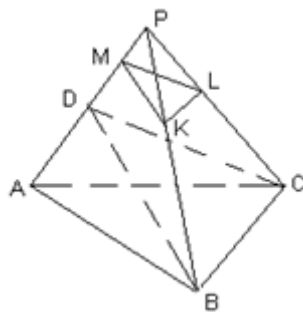


# Решения задач:

В правильном тетраэдре  $PABC$   $M \in [PA]$ ;  $|AM| : |MP| = 4 : 1$ . В каком отношении делит объем тетраэдра плоскость, проходящая через точку  $M$  перпендикулярно ребру  $PA$ ?

$D$  – середина  $[PA]$ , тогда



$(PA) \perp (BDC)$ . Следовательно, если  $(MK) \parallel (BD)$  и  $(ML) \parallel (CD)$ , то  $(MKL) \parallel (BDC)$ , значит,  $(MKL) \perp (PA)$ .

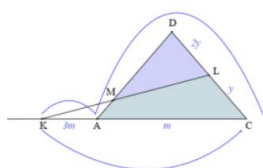
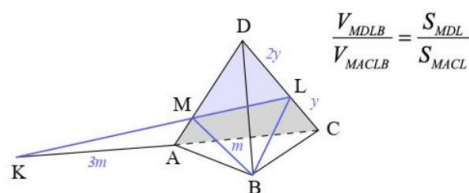
$$|PK| : |KB| = |PL| : |LC| = |PM| : |MD| = 2 : 5;$$

$$\frac{V_{PMKL}}{V_{PABC}} = \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{125}.$$

Следовательно, данная плоскость делит объем тетраэдра в отношении

**4 : 121**

На продолжении ребра  $AC$  правильной треугольной пирамиды  $ABCD$  с вершиной  $D$  взята точка  $K$  так, что  $KA:KC=3:4$ , а на ребре  $DC$  взята точка  $L$  так, что  $DL:LC=2:1$ . В каком отношении делит объем пирамиды плоскость, проходящая через точки  $B, L$  и  $K$ ?

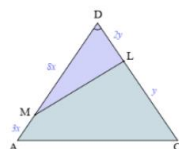


По теореме Менелая:

$$\frac{CL}{LD} \cdot \frac{DM}{MA} \cdot \frac{AK}{KC} = 1$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{DM}{MA} \cdot \frac{3}{4} = 1$$

$$\frac{DM}{MA} = \frac{8}{3}$$

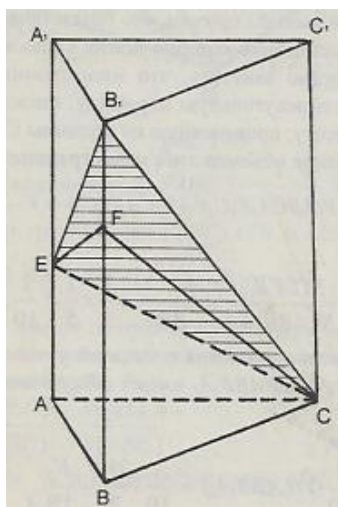


$$\frac{S_{MDL}}{S_{AMLC}} = \frac{S_{MDL}}{S_{ADC} - S_{MDL}} = \frac{\frac{1}{2} MD \cdot DL \cdot \sin \angle ADC}{\frac{1}{2} AD \cdot CD \cdot \sin \angle ADC - \frac{1}{2} MD \cdot DL \cdot \sin \angle ADC} =$$

$$= \frac{8x \cdot 2y}{11x \cdot 3y - 8x \cdot 2y} = \frac{8x \cdot 2y}{x \cdot y(33 - 16)} = \frac{16}{17}$$

Ответ: объем делится в отношении  $\frac{16}{17}$

**Задача 1.** Объем треугольной призмы  $ABCA_1B_1C_1$  равен  $V$ . Точка  $E$  – середина ребра  $AA_1$ , точка  $F$  лежит на ребре  $BB_1$ , причем  $\frac{B_1F}{FB} = \frac{1}{4}$ . Проведены две плоскости: одна проходит через точки  $C, F$  и  $B_1$ , другая – через точки  $C_1, E$  и  $F$ . Найдите объем части призмы, заключенной между этими плоскостями.



**Решение.** Многогранник, заключенный между указанными плоскостями, представляет собой тетраэдр  $CEFB_1$ , и задача состоит в том, чтобы выяснить, какая доля объема призмы приходится на его объем.

При ее решении необходимо обратить внимание на следующие моменты.

1. От тетраэдра  $CEFB_1$  к призме «переходят» через промежуточное звено – пирамиду, объем которой легко сравнить с объемами обоих многогранников. Для этого (в данной и подобных задачах) рассматривают пирамиду, основание которой совпадает с одним из оснований призмы, а вершина лежит в плоскости другого основания (и, как правило, совпадает с вершиной призмы). Очевидно, что объем любой построенной таким образом пирамиды составляет треть от объема призмы.

2. Поскольку в данном случае ни одна из граней тетраэдра  $CEFB_1$  не совпадает с основанием призмы, его объем проще сравнить с объемом пирамиды, основание которой лежит в плоскости боковой грани призмы. Нетрудно заметить, что многогранник  $CABB_1A_1$  представляет собой четырехугольную пирамиду, имеющую с тетраэдром  $CEFB_1$  общую высоту, проведенную из вершины  $C$ .

Найдем отношение объемов этих многогранников.

$$V(CABB_1A_1) = V(ABCA_1B_1C_1) - V(CA_1B_1C_1) = V - \frac{V}{3} = \frac{2V}{3}.$$

$$\frac{V(CEFB_1)}{V(CABB_1A_1)} = \frac{S(EFB_1)}{S(ABB_1A_1)} = \frac{\frac{1}{2} FB_1}{BB_1} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{10}.$$

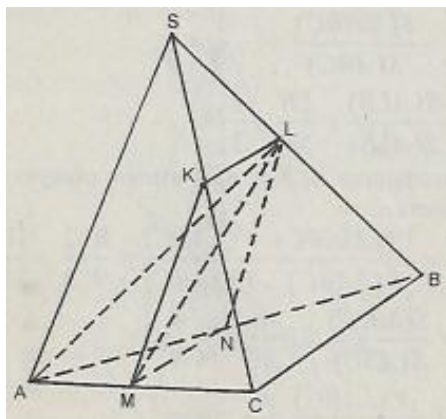
(При вычислении отношения площадей учтено, что треугольник  $EFB_1$  и параллелограмм  $ABB_1A_1$  имеют общую высоту, проведенную из точки  $E$ .)

Таким образом,

$$V(CEFB_1) = \frac{1}{10} \cdot V(CABB_1A_1) = \frac{1}{10} \cdot \frac{2V}{3} = \frac{V}{15}.$$

Ответ:  $\frac{V}{15}$ .

**Задача 4.** В треугольной пирамиде  $SABC$  проведена плоскость, параллельная ребрам  $SA$  и  $BC$ . Эта плоскость пересекает ребро  $AC$  в точке  $M$  так, что  $AM : MC = 1 : 2$ . В каком отношении эта плоскость делит объем пирамиды  $SABC$ ?



**Решение.** Построим сечение тетраэдра  $SABC$  заданной плоскостью. Для этого отметим на ребрах  $SA$  и  $AB$  соответственно точки  $K$  и  $N$  так, что  $MK \parallel SA$ ,  $MN \parallel BC$ , а на ребре  $SB$  – точку  $L$  так, что  $KL \parallel BC$ .

Многогранники, на которые делит тетраэдр плоскость  $KMN$ , не поддаются стандартной классификации, поэтому хотя бы один из них, например  $MKCNLB$ , «разрежем» на части: проведем отрезки  $LK$  и  $LM$ , тогда он окажется составленным из двух пирамид –  $LMNBC$  и  $LMKC$ .

1. От четырехугольной пирамиды  $LMNBC$  проще всего перейти к тетраэдру  $LABC$ , имеющему с ней общую высоту. При поиске отношения их объемов потребуются сравнить площади оснований, что не составит труда, если учесть, что треугольники  $ANM$  и  $ABC$  подобны по двум углам. Тетраэдр  $LABC$  имеет следующие общие элементы: трехгранный угол при вершине  $B$ , основание  $ABC$  и высоту, проведенную из вершины  $C$ .

2. В тетраэдре  $LMKC$  основанием будем считать треугольник, лежащий в плоскости одной из граней тетраэдра  $SABC$ , например  $MKC$ . Тетраэдр  $LASC$  имеет общие высоты с тетраэдрами  $LMKC$  и  $SABC$ . Учитываем, что  $AM : MC = 1 : 2 = SK : KC = SL : LB = AN : NB$  (по обобщенной теореме Фалеса).

$$\frac{S(ANM)}{S(ABC)} = \left(\frac{AM}{AC}\right)^2 = \frac{1}{9},$$

$$\frac{V(LMNBC)}{V(LABC)} = \frac{S(MNBC)}{S(ABC)} = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9},$$

$$\frac{V(LABC)}{V(SABC)} = \frac{S(ALB)}{S(ASB)} = \frac{LB}{SB} = \frac{2}{3}.$$

Так как треугольники  $ALB$  и  $ASB$  имеют общую высоту, проведенную из вершины  $A$ , то

$$\frac{V(LMNBC)}{V(SABC)} = \frac{V(LMNBC)}{V(LABC)} \cdot \frac{V(LABC)}{V(SABC)} = \frac{8}{9} \cdot \frac{2}{3} = \frac{16}{27}.$$

$$\frac{V(LMKC)}{V(LASC)} = \frac{S(MKC)}{S(ASC)} = \left(\frac{MC}{AC}\right)^2 = \frac{4}{9},$$

$$\frac{V(LASC)}{V(SABC)} = 1 - \frac{V(LABC)}{V(SABC)} = \frac{1}{3}, \text{ тогда}$$

$$\frac{V(LMKC)}{V(SABC)} = \frac{V(LMKC)}{V(LASC)} \cdot \frac{V(LASC)}{V(SABC)} = \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{27}.$$

Искомое отношение объемов:

$$\frac{V(MKCNLB)}{V(SABC)} = \frac{16}{27} + \frac{4}{27} = \frac{20}{27},$$

$$\frac{V(AMNSKL)}{V(SABC)} = 1 - \frac{20}{27} = \frac{7}{27},$$

$$\text{следовательно, } \frac{V(MKCNLB)}{V(AMNSKL)} = \frac{20}{7}.$$

Ответ:  $\frac{20}{7}$ .