

Если на некотором множестве функция $f(x)$ строго возрастает, а функция $g(x)$ строго убывает, то уравнение вида $f(x) = g(x)$ имеет не более одного корня (утверждение выполняется и в случае нестрогой монотонности одной из функций).

Утверждение позволяют обосновывать единственность решения уравнения в тех случаях, когда свести его к простейшему не удастся, но удастся подобрать корень.

Доказательство: Если $g(x)$ строго убывает, то $-g(x)$ строго возрастает, тогда $u(x) = f(x) - g(x)$ монотонно возрастает как сумма двух возрастающих. Тогда уравнение $f(x) = g(x)$ свелось к уравнению $u(x) = 0$. Предположим, что последнее уравнение имеет более одного корня, например x_1 и x_2 . Пусть $x_1 < x_2$. В силу монотонности $u(x)$ тогда $u(x_1) < u(x_2)$, что противоречит условию $u(x_1) = 0 = u(x_2)$.

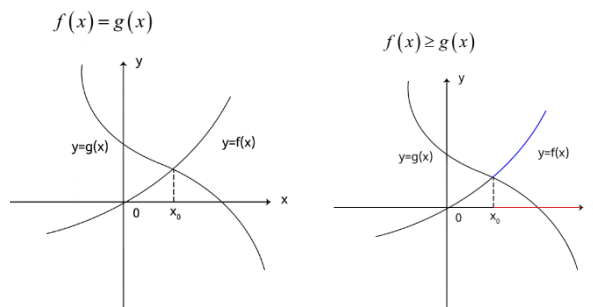
Решите уравнение $x^3 + 7\sqrt[3]{6x-7} + 6 = 0$

Решение:

Перепишем уравнение в виде

$$x^3 + 6 = -7\sqrt[3]{6x-7}$$

В левой части уравнения стоит монотонно возрастающая функция на всей числовой прямой, в правой части монотонно убывающая функция при всех значениях x , тогда, если уравнение имеет решение, то оно единственное. Заметим, что $x = 1$ является решением.



Ответ: $x = 1$

Если функция $f(x)$ монотонно возрастает (убывает), то уравнение вида $f(x) = x$ и $f(f(x)) = x$ и $f(f(\dots f(x)\dots)) = x$ имеют одно и то же множество корней.

Доказательство: Пусть x_0 является корнем уравнения $f(x) = x$, т.е. $f(x_0) = x_0$. Тогда $f(f(x_0)) = f(x_0) = x_0$. Обратно, пусть число x_0 является корнем уравнения $f(f(x)) = x$, т.е. $f(f(x_0)) = x_0$. Докажем, что $f(x_0) = x_0$. Пусть это не так, тогда либо $f(x_0) > x_0$, либо $f(x_0) < x_0$.

В силу монотонного возрастания функции $f(x)$ из неравенства $f(x_0) > x_0$ следует, что $f(f(x_0)) > f(x_0)$, что противоречит $f(f(x_0)) = x_0$. Аналогично из неравенства $f(x_0) < x_0$ в силу монотонности $f(x)$ следует, что $f(f(x_0)) < f(x_0)$, что противоречит $f(f(x_0)) = x_0$. Значит, наше предположение неверное, и $f(x_0) = x_0$.

Решите уравнение $x^3 - 7\sqrt[3]{7x-6} + 6 = 0$

Решение:

Перепишем уравнение в виде $\sqrt[3]{7x-6} = \frac{x^3+6}{7}$.

Возведем обе части в куб.

$$7x-6 = \left(\frac{x^3+6}{7}\right)^3; \quad x = \frac{\left(\frac{x^3+6}{7}\right)^3 + 6}{7}.$$

Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{x^3+6}{7}$,

возрастающую на всей числовой прямой.

Полученное уравнение имеет вид $f(f(x)) = x$, которое имеет то же множество решений, что и уравнение $f(x) = x$. Откуда

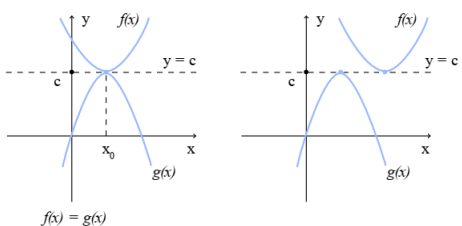
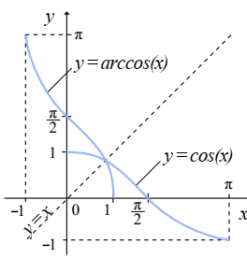
$$\frac{x^3+6}{7} = x; \quad x^3 - 7x + 6 = 0.$$

$$x^3 - x - 6x + 6 = 0$$

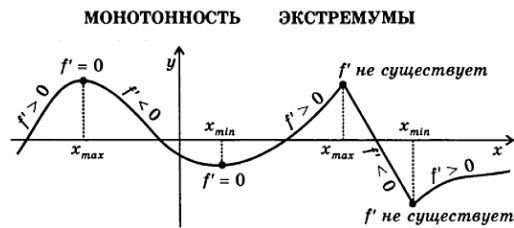
$$x(x^2 - 1) - 6(x - 1) = 0$$

$$(x-1)(x^2 + x - 6) = 0$$

$$(x-1)(x+3)(x-2) = 0$$

<p>Если функция $f(x)$ монотонно возрастает (убывает), то $f(a)=f(b)$ тогда и только тогда, когда $a=b$</p>	<p>Решите уравнение</p> $x^9 - (2x+1)^3 - 16\sqrt[3]{2x+1} + 16x = 0$ <p><i>Решение:</i> Перепишем уравнение в виде</p> $(x^3)^3 + 16\sqrt[3]{x^3} = (2x+1)^3 + 16\sqrt[3]{2x+1}$ <p>Рассмотрим функцию $f(t) = t^3 + 16\sqrt[3]{t}$, монотонно возрастающую на всей числовой прямой (как сумма двух возрастающих). Уравнение можно переписать как $f(x^3) = f(2x+1)$. В силу монотонного возрастания $f(t)$, равенство будет выполняться в том и только том случае, когда $x^3 = 2x+1$.</p> $x^3 - 2x - 1 = 0$ $x^3 - x - x - 1 = 0$ $x(x^2 - 1) - (x+1) = 0$ $(x+1)(x^2 - x - 1) = 0$ $(x+1)\left(x - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 0$
<p>Если $\max f(x) = c$ и $\min g(x) = c$, то уравнение $f(x) = g(x)$ (как и неравенство $f(x) \leq g(x)$) имеет то же множество решений, что и система</p> $\begin{cases} f(x) = c \\ g(x) = c \end{cases}$  <p>Ограниченность функций:</p> $ \sin x \leq 1; \quad \cos x \leq 1;$ $ a \sin x + b \cos x \leq \sqrt{a^2 + b^2};$ $-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin x \leq \frac{\pi}{2}; \quad 0 \leq \arccos x \leq \pi;$ $-\frac{\pi}{2} \leq \operatorname{arctg} x \leq \frac{\pi}{2}; \quad 0 \leq \operatorname{arcctg} x \leq \pi$	<p>Решите уравнение $2^{x^3-1} + 2^{1-x^3} = 2 - \arccos(\sqrt[3]{x})$</p> <p><i>Решение:</i> Показательная функция всегда положительна. В левой части уравнения стоит сумма взаимнообратных величин, воспользуемся неравенством Коши</p> $a + \frac{1}{a} \geq 2 \quad (a > 0),$ <p>тогда левая часть не меньше 2, а равенство возникает при $2^{x^3-1} = 2^{1-x^3} = 1$, т.е. $x = 1$</p>  <p>Так как $0 \leq \arccos(\sqrt[3]{x}) \leq \pi$, то правая часть не больше 2, а равенство возникает при $\arccos(\sqrt[3]{x}) = 0$, т.е. единственное решение $x = 1$</p> <p><i>Ответ:</i> $x = 1$</p>

Применение производной для исследования функции.



Замечание. Приведенные условия являются только *достаточными* условиями монотонности, но не являются *необходимыми*. Например, функция $y = x^3$ возрастает во всей области определения, хотя ее производная $y' = 3x^2$ обращается в нуль при $x = 0$.

Решите уравнение

$$x^2 + \frac{3\sqrt{3}}{1 + \sqrt{x^4 - 8x^3 + 16x^2 + 1}} = 4x$$

Решение:

Перепишем уравнение в виде

$$(4x - x^2) \left(1 + \sqrt{x^4 - 8x^3 + 16x^2 + 1} \right) = 3\sqrt{3}$$

$$(4x - x^2) \left(1 + \sqrt{(4x - x^2)^2 + 1} \right) = \sqrt{3} \left(1 + \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1} \right)$$

Рассмотрим функцию $f(t) = t \left(1 + \sqrt{t^2 + 1} \right)$,

возрастающую на всей числовой оси. Последнее можно доказать, найдя производную.

$$f'(t) = 1 \cdot \left(1 + \sqrt{t^2 + 1} \right) + t \cdot \frac{2t}{2\sqrt{t^2 + 1}} =$$

$$= 1 + \sqrt{t^2 + 1} + \frac{t^2}{\sqrt{t^2 + 1}} > 0$$

В силу возрастания функции $y = f(t)$ равенство

$f(a) = f(b)$ выполняется тогда и только тогда,

когда $a = b$. В нашем случае $(4x - x^2) = \sqrt{3}$

Получаем уравнение $x^2 - 4x + \sqrt{3} = 0$, откуда

$$x = 2 \pm \sqrt{4 - \sqrt{3}}.$$

Ответ: $x = 2 - \sqrt{4 - \sqrt{3}}$ и $x = 2 + \sqrt{4 - \sqrt{3}}$

Задачи домашнего задания:

Задача 1. Решите уравнение $1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x^8}}}} = \frac{1}{x^{16}}$

Решение: Обозначим $t = \frac{1}{x^{16}}$, где $t > 0$, получим уравнение $1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{t}}} = t$.

Рассмотрим функцию $f(t) = 1 + \sqrt{t}$, она возрастает на своей области определения.

Уравнение можно записать в виде $f(f(f(f(t)))) = t$. В силу монотонного возрастания функции $f(t)$, это уравнение имеет то же множество решений, что и уравнение $f(t) = t$, т.е. уравнение $1 + \sqrt{t} = t$.

Единственным положительным корнем этого квадратного относительно \sqrt{t} уравнения является $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$, тогда $\sqrt{t} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, значит $\frac{1}{x^8} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, т.е. $x^8 = \frac{2}{\sqrt{5}+1}$, следовательно

$$x = \sqrt[8]{\frac{2}{\sqrt{5}+1}} = \sqrt[8]{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$$

Ответ: $x = \sqrt[8]{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$

Задача 2. Решите уравнение $4\sin 3x + 3\cos 4x = 7$

$$\begin{aligned} \sin 3x \leq 1 \\ \cos 4x \leq 1 \end{aligned} \quad \begin{cases} \sin 3x = 1 \\ \cos 4x = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \\ 4x = 2\pi k \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad \begin{aligned} \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3} &= \frac{\pi k}{2} \\ 1 + 4n &= 3k \\ k &= \frac{1+4n}{3} = n + \frac{1+n}{3} \\ 1+n &= 3t, \quad t \in \mathbb{Z} \\ n &= 3t-1 \\ k &= \frac{1+4n}{3} = 4t-1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3} = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi(3t-1)}{3} = \\ &= \frac{\pi}{6} - \frac{2\pi}{3} + 2\pi t = -\frac{\pi}{2} + 2\pi t, t \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Ответ: $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi t, t \in \mathbb{Z}$

Задача 3. Найдите все интервалы вида $(k; k+1)$, где k — целое число, содержащее нули функции $f(x) = ((x^3 - 1) - 1)^3 - 1$

Рассмотрим функцию $g(x) = x^3 - 1$ — строго возрастающая на всей числовой оси.

Функция $f(x) = g(g(g(x)))$ — строго возрастающая на всей числовой оси.

Следовательно уравнение $f(x) = 0$ может иметь только одно решение.

Заметим, что $f(1) = ((1-1)^3 - 1)^3 - 1 = -2 < 0$; $f(2) = ((8-1)^3 - 1)^3 - 1 > 0$

Ответ: интервал существует только один — $(1; 2)$.

Задача 4. В течение одной рабочей недели цена на нефть менялась каждый день на одно и то же число процентов a ($1 \leq a \leq 50$) по сравнению с предыдущей ценой, причем в понедельник и среду она уменьшалась, а во вторник, четверг и пятницу — увеличивалась. Могла ли к субботе цена на нефть увеличиться на 11% по сравнению с первоначальной ценой?

Пусть A — исходная цена на нефть (до колебаний).

Введем обозначение:

$$x = \frac{a}{100}; \frac{1}{100} \leq x \leq \frac{1}{2}$$

Тогда к субботе цена на нефть составит: $A \cdot (1-x)^2 \cdot (1+x)^3$

$$(A \cdot (1-x)^2 \cdot (1+x)^3 = ? = 1,11 \cdot A)$$

$$((1-x)^2 \cdot (1+x)^3 = 1,11)?$$

Рассмотрим функцию $f(x) = (1-x)^2 \cdot (1+x)^3 = (1-x^2)^2 (1+x)$

Найдем множество значений функции при: $\frac{1}{100} \leq x \leq \frac{1}{2}$

Возьмем производную функции:

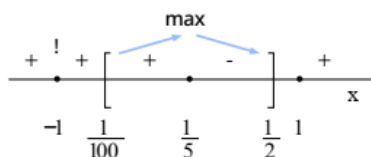
$$f'(x) = ((x^2 - 1)^2 (x+1))' =$$

$$= 2(x^2 - 1) \cdot 2x \cdot (x+1) + (x^2 - 1)^2 =$$

$$= (x^2 - 1)(4x^2 + 4x + x^2 - 1)$$

$$= (x^2 - 1)(5x^2 + 4x - 1) = 0$$

$$f\left(\frac{1}{5}\right) = \left(\left(\frac{1}{5}\right)^2 - 1\right)^2 \left(\frac{1}{5} + 1\right) = 1,10592$$



$$f(x) < 1,11$$

Ответ:
не могла увеличиться на 11%