

## 1. Классические неравенства между средними.

$$(a_1, a_2, \dots, a_n > 0)$$

четыре средних связаны одной цепочкой неравенств:

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}},$$

причем равенство достигается только в случае  $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ .

*Пример.* Сумма пяти положительных чисел равна единице. Доказать, что их можно расставить по кругу так, что сумма всех пяти попарных произведений соседних чисел будет не больше  $\frac{1}{5}$ .

*Решение:*

Пусть  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$  — данные числа.

Рассмотрим

$$\begin{aligned} (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5)^2 &= a_1^2 + 2a_1(a_2 + a_3 + a_4 + a_5) + (a_2 + a_3 + a_4 + a_5)^2 = \\ &= a_1^2 + 2(a_1 \cdot a_2 + a_1 \cdot a_3 + a_1 \cdot a_4 + a_1 \cdot a_5) + a_2^2 + 2a_2(a_3 + a_4 + a_5) + (a_3 + a_4 + a_5)^2 = \\ &= a_1^2 + a_2^2 + 2(a_1 \cdot a_2 + a_1 \cdot a_3 + a_1 \cdot a_4 + a_1 \cdot a_5 + a_2 \cdot a_3 + a_2 \cdot a_4 + a_2 \cdot a_5) + a_3^2 + 2a_3(a_4 + a_5) + (a_4 + a_5)^2 = \\ &= a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + 2(a_1 \cdot a_2 + a_1 \cdot a_3 + a_1 \cdot a_4 + a_1 \cdot a_5 + a_2 \cdot a_3 + a_2 \cdot a_4 + a_2 \cdot a_5 + a_3 \cdot a_4 + a_3 \cdot a_5) + a_4^2 + 2a_4 \cdot a_5 + a_5^2 = \\ &= a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 + 2(a_1 \cdot a_2 + a_1 \cdot a_3 + a_1 \cdot a_4 + a_1 \cdot a_5 + a_2 \cdot a_3 + a_2 \cdot a_4 + a_2 \cdot a_5 + a_3 \cdot a_4 + a_3 \cdot a_5 + a_4 \cdot a_5) \end{aligned}$$

Обозначим

$$S_1 = a_1 \cdot a_2 + a_2 \cdot a_3 + a_3 \cdot a_4 + a_4 \cdot a_5 + a_5 \cdot a_1$$

$$S_2 = a_1 \cdot a_3 + a_3 \cdot a_5 + a_5 \cdot a_2 + a_2 \cdot a_4 + a_4 \cdot a_1$$

Так как

$$S_1 + S_2 = \frac{1}{2} \left( (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5)^2 - (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2) \right) \leq \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{5} \right) = \frac{2}{5},$$

то одно из чисел  $S_1$  или  $S_2$  не больше  $\frac{1}{5}$ .

Здесь применили неравенство между средним квадратическим и средним арифметическим:

$$\begin{aligned} \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5}{5} &\leq \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2}{5}} \\ \left( \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5}{5} \right)^2 &\leq \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2}{5} \\ \frac{1}{25} &\leq \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2}{5} \\ a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 &\geq \frac{1}{5} \end{aligned}$$

## 2. Неравенство между средними степенными.

Введем определение.

Средним степенным порядка  $t$  для  $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$  называется число

$$M_t = \begin{cases} \left( \frac{a_1^t + a_2^t + \dots + a_n^t}{n} \right)^{\frac{1}{t}}, & t \neq 0 \\ \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}, & t = 0 \end{cases}$$

Отметим, что через среднее степенное классические неравенства между средними выглядят следующим образом:  $M_{-1} \leq M_0 \leq M_1 \leq M_2$ .

Данная цепочка является частным случаем следующего общего утверждения:

**$M_t$  возрастает как функция от  $t$ .**

Пример. Пусть  $\alpha, \beta, \gamma$  - углы остроугольного треугольника. Доказать, что при  $0 < p \leq 1$  верно

$$\cos^p \alpha + \cos^p \beta + \cos^p \gamma \leq \frac{3}{2^p}, \text{ а при } p \geq 2 \text{ верно } \cos^p \alpha + \cos^p \beta + \cos^p \gamma \geq \frac{3}{2^p}.$$

Решение:

Пусть  $0 < p \leq 1$

Рассмотрим  $\left( \frac{\cos^p \alpha + \cos^p \beta + \cos^p \gamma}{3} \right)^{\frac{1}{p}}$ . По неравенству между средними степенными

$$\left( \frac{\cos^p \alpha + \cos^p \beta + \cos^p \gamma}{3} \right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma}{3}$$

$$\text{Покажем, что } \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma \leq \frac{3}{2}$$

Так как  $\alpha, \beta, \gamma$  - углы треугольника, то  $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ .

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = \cos \alpha + \cos \beta - \cos(\alpha + \beta) =$$

По формулам:

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos(\alpha + \beta) = 2 \cos^2 \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right) - 1$$

$$= 2 \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2} - \left( 2 \cos^2 \frac{\alpha + \beta}{2} - 1 \right) \leq 2 \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2} - 2 \cos^2 \frac{\alpha + \beta}{2} + 1$$

$$(\text{так как } \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \leq 1)$$

$$\begin{aligned}
&= -2\cos^2 \frac{\alpha+\beta}{2} + 2 \cdot \cos \frac{\alpha+\beta}{2} + 1 = -\frac{1}{2} \left( 4\cos^2 \frac{\alpha+\beta}{2} - 4 \cdot \cos \frac{\alpha+\beta}{2} + 1 \right) + \frac{3}{2} = \\
&= -\frac{1}{2} \left( 2\cos \frac{\alpha+\beta}{2} - 1 \right)^2 + \frac{3}{2} \leq \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

Тогда

$$\left( \frac{\cos^p \alpha + \cos^p \beta + \cos^p \gamma}{3} \right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma}{3} \leq \frac{\frac{3}{2}}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\cos^p \alpha + \cos^p \beta + \cos^p \gamma}{3} \leq \left( \frac{1}{2} \right)^p$$

$$\cos^p \alpha + \cos^p \beta + \cos^p \gamma \leq \frac{3}{2^p}$$

Пусть  $p \geq 2$

Рассмотрим  $\left( \frac{\cos^p \alpha + \cos^p \beta + \cos^p \gamma}{3} \right)^{\frac{1}{p}}$ . По неравенству между средними степенными

$$\left( \frac{\cos^p \alpha + \cos^p \beta + \cos^p \gamma}{3} \right)^{\frac{1}{p}} \geq \left( \frac{\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma}{3} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Надо доказать, что  $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma \geq \frac{3}{4}$ , тогда

$$\frac{\cos^p \alpha + \cos^p \beta + \cos^p \gamma}{3} \geq \left( \frac{\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma}{3} \right)^{\frac{p}{2}} \geq \left( \frac{\left( \frac{3}{4} \right)^{\frac{p}{2}}}{3} \right) = \left( \frac{1}{2} \right)^p$$

$$\cos^p \alpha + \cos^p \beta + \cos^p \gamma \geq \frac{3}{2^p}$$

*К домашнему заданию:* Пусть  $\alpha, \beta, \gamma$  - углы остроугольного треугольника. Доказать, что

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma \geq \frac{3}{4}.$$

*Указание.* Так как треугольник остроугольный, то  $\alpha, \beta, \gamma \in \left( 0; \frac{\pi}{2} \right)$ . Можно сделать следующую замену переменных:  $x = \pi - 2\alpha$ ;  $y = \pi - 2\beta$ ;  $z = \pi - 2\gamma$ . Заметим, что  $x + y + z = \pi$  и  $x, y, z \in (0; \pi)$ , т.е.  $x, y, z$  - это углы треугольника, а значит можно воспользоваться утверждением, доказанным на занятии для произвольного треугольника  $\cos x + \cos y + \cos z \leq \frac{3}{2}$

### 3. Неравенство Бернулли.

Пусть  $x > -1$ . Тогда

$$(1+x)^\alpha \geq 1+\alpha x \text{ при } \alpha > 1;$$

$$(1+x)^\alpha \leq 1+\alpha x \text{ при } 0 < \alpha < 1$$

Равенство достигается только при  $x = 0$ .

*Пример.* Пусть  $n$  - натуральное число,  $n \geq 2$ . Доказать, что  $n^n > (n+1)^{n-1}$

*Решение:*

Рассмотрим  $\frac{n^n}{(n+1)^n}$ .

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(\frac{n+1-1}{n+1}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n > 1 - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

$$\frac{n^n}{(n+1)^n} > \frac{1}{n+1}, \text{ домножим на } (n+1)^n > 0 \text{ и получим требуемое неравенство.}$$

### 4. Неравенство Коши – Буняковского- Шварца.

В 1821 году О. Коши опубликовал одно из важнейших классических неравенств:

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2, \text{ где } a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n -$$

произвольные вещественные числа. Позднее русский математик В.Я. Буняковский доказал интегральный аналог этого неравенства. Далее к таким же результатам пришел немецкий математик Г. Шварц. В связи с этим данное неравенство называют неравенством Коши-Буняковского или Коши-Буняковского-Шварца.

Если положим  $b_1 = b_2 = \dots = b_n = 1$ , то получим часто используемый частный случай неравенства

Коши-Буняковского  $(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) \cdot n \geq (a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2$ , где  $a_1, a_2, \dots, a_n$  произвольные вещественные числа.

*Пример.* Даны вещественные числа  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Найдите максимальное значение выражения

$$A = (\sin x_1 + \sin x_2 + \dots + \sin x_n) \cdot (\cos x_1 + \cos x_2 + \dots + \cos x_n)$$

*Решение:*

Заметим, что  $a^2 + b^2 \geq 2ab$  для любых действительных  $a$  и  $b$ , причем  $a^2 + b^2 = 2ab$ , только если  $a = b$ .

$$\begin{aligned} A &= (\sin x_1 + \sin x_2 + \dots + \sin x_n) \cdot (\cos x_1 + \cos x_2 + \dots + \cos x_n) \leq \\ &\leq \frac{1}{2} ((\sin x_1 + \sin x_2 + \dots + \sin x_n)^2 + (\cos x_1 + \cos x_2 + \dots + \cos x_n)^2) \end{aligned}$$

По неравенству Коши-Буняковского  $(\sin x_1 + \sin x_2 + \dots + \sin x_n)^2 \leq n(\sin^2 x_1 + \sin^2 x_2 + \dots + \sin^2 x_n)$  и

$(\cos x_1 + \cos x_2 + \dots + \cos x_n)^2 \leq n(\cos^2 x_1 + \cos^2 x_2 + \dots + \cos^2 x_n)$ . Тогда

$$\begin{aligned} A &\leq \frac{1}{2}(\sin x_1 + \sin x_2 + \dots + \sin x_n)^2 + \frac{1}{2}(\cos x_1 + \cos x_2 + \dots + \cos x_n)^2 \leq \\ &\leq \frac{n}{2}(\sin^2 x_1 + \sin^2 x_2 + \dots + \sin^2 x_n) + \frac{n}{2}(\cos^2 x_1 + \cos^2 x_2 + \dots + \cos^2 x_n) = \\ &= \frac{n}{2}(\sin^2 x_1 + \sin^2 x_2 + \dots + \sin^2 x_n + \cos^2 x_1 + \cos^2 x_2 + \dots + \cos^2 x_n) = \frac{n^2}{2} \end{aligned}$$

Равенство достигается в случае  $x_1 = x_2 = \dots = x_n = \frac{\pi}{4}$

Ответ:  $\frac{n^2}{2}$

## 5. Неравенство Иенсена.

Среди известных классических неравенств особое место занимает неравенство, которое принято называть Иенсена, оно было получено О.Гельдером в 1889 г, а датский математик Иоганн Людовиг Иенсен доказал его интегральный аналог в 1906 г.

Сначала дадим одно важное определение. Функция  $f$ , заданная на некотором промежутке вещественной оси, называется выпуклой, если для любых чисел  $x_1, x_2$  из этого промежутка и любого числа  $\alpha \in [0; 1]$  выполняется неравенство  $f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1 - \alpha)f(x_2)$ .

Графически это означает, что всякая хорда, соединяющая две точки на графике, лежит выше соответствующей части графика.

Для применения неравенства Иенсена необходимо определить, является ли функция выпуклой. Мы это умеем делать с помощью второй производной: если функция дважды дифференцируема, и вторая производная этой функции неотрицательна, то функция – выпуклая.

Итак, сформулируем неравенство Иенсена.

Пусть  $f$  - выпуклая функция, тогда  $f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n) \leq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + \dots + \alpha_n f(x_n)$ , где  $x_1, x_2, \dots, x_n$  - числа из области определения функции  $f$ ,  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  - положительные числа, сумма которых равна 1.

Часто используемая запись неравенства для выпуклой функции  $f$ :

$$f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n) \geq n \cdot f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right)$$

Если в определении выпуклой функции знак неравенства изменить на противоположный, то соответствующая функция называется вогнутой. Ясно, что функция  $f$  вогнута тогда и только тогда, когда функция  $(-f)$  выпукла. Критерием вогнутости для дважды дифференцируемой функции является не положительность ее второй производной. Неравенство Иенсена для вогнутой функции  $f$  выглядит так:  $f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n) \geq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + \dots + \alpha_n f(x_n)$  где

$x_1, x_2, \dots, x_n$  - числа из области определения функции  $f$ ,  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  - положительные числа, сумма которых равна 1.

Часто используемая запись неравенства для вогнутой функции  $f$ :

$$f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n) \leq n \cdot f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right)$$

Покажем теперь, как из неравенства Йенсена можно получить неравенство между средними степенными:

Пусть  $M_t$  - среднее степенное порядка  $t$  для  $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$ :

$$M_t = \begin{cases} \left(\frac{a_1^t + a_2^t + \dots + a_n^t}{n}\right)^{\frac{1}{t}}, & t \neq 0 \\ \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}, & t = 0 \end{cases}$$

Тогда  $M_{t_1} \leq M_{t_2}$  при  $0 < t_1 < t_2$

Используя обозначения  $b_i = a_i^{t_1}$ ,  $t = \frac{t_1}{t_2} > 1$ , запишем неравенство  $M_{t_1} \leq M_{t_2}$  в виде:

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^n b_i}{n}\right)^t \leq \frac{\sum_{i=1}^n b_i^t}{n}, \text{ а это неравенство Йенсена для выпуклой функции } f(x) = x^t, (x > 0),$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = \frac{1}{n}.$$

В частности, тем самым доказаны и классические неравенства между средними:

$$\frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}} \leq \left(\prod_{i=1}^n a_i\right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n} \leq \left(\frac{\sum_{i=1}^n a_i^2}{n}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad (a_1, a_2, \dots, a_n > 0)$$

*Пример.* Сумма положительных чисел  $a, b, c$  в семь раз меньше их произведения. Найдите наименьшее значение выражения  $ab + bc + ac$ .

*Решение:*

По условию  $a + b + c = \frac{1}{7}abc$ . Разделим на  $abc$ :  $\frac{1}{bc} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{ab} = \frac{1}{7}$ .

Пусть  $x = \frac{1}{bc}$ ,  $y = \frac{1}{ac}$ ,  $z = \frac{1}{ab}$ , тогда  $x + y + z = \frac{1}{7}$ . Надо найти значение выражения

$ab + bc + ac = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ . Рассмотрим функцию  $f(t) = \frac{1}{t}$ , для  $t > 0$  она вогнута, тогда

запишем неравенство Йенсена для вогнутой функции:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = f(x) + f(y) + f(z) \leq 3 \cdot f\left(\frac{x + y + z}{3}\right) = 3 \cdot \frac{1}{\frac{x + y + z}{3}} = 3 \cdot \frac{3}{\frac{1}{7}} = 63.$$

*Ответ:* 63

Задачи для самостоятельного решения:

1. Пусть  $a, b, c > 0$  и  $a + b + c = 1$ . Доказать, что  $\sqrt{2a+1} + \sqrt{2b+1} + \sqrt{2c+1} \leq \sqrt{15}$
2. Пусть  $n$  - натуральное число,  $a, b, c > 0$  и  $a + b + c = 1$ . Доказать, что  $\sqrt[n]{ab} + \sqrt[n]{bc} + \sqrt[n]{ca} \leq \sqrt[n]{3^{n-2}}$ .
3. Доказать, что  $\sqrt[3]{3 + \sqrt[3]{3}} + \sqrt[3]{3 - \sqrt[3]{3}} < 2\sqrt[3]{3}$ .
4. Пусть числа  $a, b \geq \frac{1}{2}$ . Доказать, что  $\left(\frac{a^2 + b^2}{2}\right)^2 + \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \leq \frac{a^4 + a + b^4 + b}{2}$

Решения задач для самостоятельного решения:

1. Пусть  $a, b, c > 0$  и  $a + b + c = 1$ . Доказать, что  $\sqrt{2a+1} + \sqrt{2b+1} + \sqrt{2c+1} \leq \sqrt{15}$

Решение:

$$\left(\sqrt{2a+1} + \sqrt{2b+1} + \sqrt{2c+1}\right)^2 \leq 3\left(\left(\sqrt{2a+1}\right)^2 + \left(\sqrt{2b+1}\right)^2 + \left(\sqrt{2c+1}\right)^2\right) = 15$$

(неравенство между средним арифметическим и средним квадратическим)

2. Пусть  $n$  - натуральное число,  $a, b, c > 0$  и  $a + b + c = 1$ . Доказать, что

$$\sqrt[n]{ab} + \sqrt[n]{bc} + \sqrt[n]{ca} \leq \sqrt[n]{3^{n-2}}.$$

Решение:

Пусть  $p = \frac{1}{n}$ . По неравенству между средними степенными при  $0 < p \leq 1$

$$\left(\frac{(ab)^p + (bc)^p + (ca)^p}{3}\right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{ab + bc + ca}{3}$$

$$\text{Рассмотрим } \left(\frac{\sqrt[n]{ab} + \sqrt[n]{bc} + \sqrt[n]{ca}}{3}\right)^n \leq \frac{ab + bc + ca}{3} \leq \frac{(a + b + c)^2}{9} = \frac{1}{9}$$

$$\frac{\sqrt[n]{ab} + \sqrt[n]{bc} + \sqrt[n]{ca}}{3} \leq \left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$\sqrt[n]{ab} + \sqrt[n]{bc} + \sqrt[n]{ca} \leq \frac{3}{\sqrt[n]{9}} = \sqrt[n]{\frac{3^n}{3^2}} = \sqrt[n]{3^{n-2}}$$

3. Доказать, что  $\sqrt[3]{3 + \sqrt[3]{3}} + \sqrt[3]{3 - \sqrt[3]{3}} < 2\sqrt[3]{3}$ .

Решение: Так как функция  $f(x) = \sqrt[3]{x}$  при  $x > 0$  вогнутая, то по неравенству Йенсена

$$\sqrt[3]{3 + \sqrt[3]{3}} + \sqrt[3]{3 - \sqrt[3]{3}} = f\left(3 + \sqrt[3]{3}\right) + f\left(3 - \sqrt[3]{3}\right) \leq 2f\left(\frac{\left(3 + \sqrt[3]{3}\right) + \left(3 - \sqrt[3]{3}\right)}{2}\right) = 2\sqrt[3]{3}$$

4. Пусть числа  $a, b \geq \frac{1}{2}$ . Доказать, что  $\left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)^2 + \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \leq \frac{a^4+a+b^4+b}{2}$

*Решение:*

Рассмотрим выпуклую функцию  $f$ , заданную на промежутке  $\left[\frac{1}{4}; +\infty\right)$  по правилу  $f(x) = x^2 + \sqrt{x}$

$$\frac{f(a^2) + f(b^2)}{2} = \frac{a^4 + a + b^4 + b}{2};$$

$$f\left(\frac{a^2+b^2}{2}\right) = \left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)^2 + \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

Тогда по неравенству Иенсена  $\frac{f(a^2) + f(b^2)}{2} \geq f\left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)$