

<p><b>Классические неравенства между средними.</b></p> $\frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}} \leq \left( \prod_{i=1}^n a_i \right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n} \leq \left( \frac{\sum_{i=1}^n a_i^2}{n} \right)^{\frac{1}{2}}$ <p><math>(a_1, a_2, \dots, a_n &gt; 0)</math></p> <p>Перепишем иначе, четыре средних связаны одной цепочкой неравенств:</p> $\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}},$ <p>причем равенство достигается только в случае <math>a_1 = a_2 = \dots = a_n</math>.</p>	<p>Сумма пяти положительных чисел равна единице. Доказать, что их можно расставить по кругу так, что сумма всех пяти попарных произведений соседних чисел будет не больше <math>\frac{1}{5}</math>.</p>
<p><b>Неравенство между средними степенными.</b></p> <p>для <math>a_1, a_2, \dots, a_n &gt; 0</math></p> $M_t = \begin{cases} \left( \frac{a_1^t + a_2^t + \dots + a_n^t}{n} \right)^{\frac{1}{t}}, & t \neq 0 \\ \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}, & t = 0 \end{cases}$ <p><math>M_t</math> возрастает как функция от <math>t</math>.</p>	<p>Пусть <math>\alpha, \beta, \gamma</math> - углы остроугольного треугольника. Доказать, что при <math>0 &lt; p \leq 1</math> верно</p> $\cos^p \alpha + \cos^p \beta + \cos^p \gamma \leq \frac{3}{2^p}$ <p>а при <math>p \geq 2</math> верно</p> $\cos^p \alpha + \cos^p \beta + \cos^p \gamma \geq \frac{3}{2^p}$
<p><b>Неравенство Бернулли.</b></p> <p>Пусть <math>x &gt; -1</math>. Тогда <math>(1+x)^\alpha \geq 1+\alpha x</math> при <math>\alpha &gt; 1</math>; <math>(1+x)^\alpha \leq 1+\alpha x</math> при <math>0 &lt; \alpha &lt; 1</math>. Равенство достигается только при <math>x = 0</math>.</p>	<p>Пусть <math>n</math> - натуральное число, <math>n \geq 2</math>. Доказать, что <math>n^n &gt; (n+1)^{n-1}</math></p>
<p><b>Неравенство Коши – Буняковского- Шварца.</b></p> $\sum_{i=1}^n a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^n b_i^2 \geq \left( \sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2$ <p>Перепишем иначе:</p> $(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \geq (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2, \text{ где}$ <p><math>a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n</math> - произвольные вещественные числа.</p> <p>Если положим <math>b_1 = b_2 = \dots = b_n = 1</math>, то получим часто используемый частный случай неравенства Коши-Буняковского <math>(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) \cdot n \geq (a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2</math>, где <math>a_1, a_2, \dots, a_n</math> произвольные вещественные числа.</p>	<p>Даны вещественные числа <math>x_1, x_2, \dots, x_n</math>. Найдите максимальное значение выражения</p> $A = (\sin x_1 + \sin x_2 + \dots + \sin x_n) \cdot (\cos x_1 + \cos x_2 + \dots + \cos x_n)$

<p><b>Неравенство Йенсена.</b>  Критерием выпуклости для дважды дифференцируемой функции является не отрицательность ее второй производной.</p> <p>Пусть <math>f</math> - выпуклая функция, тогда  <math>f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n) \leq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + \dots + \alpha_n f(x_n)</math>, где  <math>x_1, x_2, \dots, x_n</math> - числа из области определения функции <math>f</math>,  <math>\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n</math> - положительные числа, сумма которых равна 1.</p> <p>Часто используемая запись неравенства для выпуклой функции <math>f</math>:</p> $f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n) \geq n \cdot f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right)$ <p>Критерием вогнутости для дважды дифференцируемой функции является не положительность ее второй производной.  Неравенство Йенсена для вогнутой функции <math>f</math> выглядит так:  <math>f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n) \geq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + \dots + \alpha_n f(x_n)</math> где  <math>x_1, x_2, \dots, x_n</math> - числа из области определения функции <math>f</math>,  <math>\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n</math> - положительные числа, сумма которых равна 1.</p> <p>Часто используемая запись неравенства для вогнутой функции <math>f</math>:</p> $f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n) \leq n \cdot f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right)$	<p>Сумма положительных чисел <math>a, b, c</math> в семь раз меньше их произведения. Найдите наименьшее значение выражения <math>ab + bc + ac</math>.</p>
--	---

Задачи для самостоятельного решения:

1. Пусть  $a, b, c > 0$  и  $a + b + c = 1$ . Доказать, что  $\sqrt{2a+1} + \sqrt{2b+1} + \sqrt{2c+1} \leq \sqrt{15}$
2. Пусть  $n$  - натуральное число,  $a, b, c > 0$  и  $a + b + c = 1$ . Доказать, что  $\sqrt[n]{ab} + \sqrt[n]{bc} + \sqrt[n]{ca} \leq \sqrt[n]{3^{n-2}}$ .
3. Доказать, что  $\sqrt[3]{3 + \sqrt[3]{3}} + \sqrt[3]{3 - \sqrt[3]{3}} < 2\sqrt[3]{3}$ .
4. Пусть числа  $a, b \geq \frac{1}{2}$ . Доказать, что  $\left(\frac{a^2 + b^2}{2}\right)^2 + \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \leq \frac{a^4 + a + b^4 + b}{2}$

Домашнее задание:

1. Пусть  $a, b, c > 0$ . Доказать, что  $\frac{2}{a+b} + \frac{2}{b+c} + \frac{2}{c+a} \geq \frac{9}{a+b+c}$ .
2. Пусть  $\alpha, \beta, \gamma$  - углы остроугольного треугольника. Доказать, что  $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma \geq \frac{3}{4}$ .
3. Пусть  $a, b, c$  - стороны треугольника. Доказать, что  $\left(1 + \frac{b-c}{a}\right)^a \left(1 + \frac{c-a}{b}\right)^b \left(1 + \frac{a-b}{c}\right)^c \leq 1$