

1. (Вспомогательный многочлен) Положительные числа a, b, c таковы, что $abc > 1$, $a + b + c < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$. Доказать, что ровно одно из этих чисел a, b, c меньше единицы.
2. (Геометрические интерпретации) Для углов α, β, γ справедливо неравенство $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma \geq 2$. Докажите, что $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma \leq \sqrt{5}$.
3. (Геометрические интерпретации) Известно, что $a^2 + b^2 = 1$ и $c^2 + d^2 = 1$. Докажите, что $ac + bd \leq 1$.
4. (Разбейте множители на пары и оцените каждую пару) Про пять положительных чисел известно, что если из суммы любых трех из них вычесть сумму двух оставшихся, то разность будет положительной. Доказать, что произведение всех десяти таких разностей не превосходит квадрата произведения данных пяти чисел.
5. (Неравенства между средними) Найдите наибольшее значение объема треугольной пирамиды, у которой противоположные ребра равны, а сумма длин всех сторон $36\sqrt{2}$.
Указание: Если провести через каждое ребро пирамиды плоскость, параллельную противоположному ребру, то получится три пары плоскостей, при пересечении которых образуется параллелепипед, называемый описанным. Так как противоположные ребра равны, то в каждой грани диагонали равны между собой, т.е. грани – прямоугольники, а значит этот параллелепипед прямоугольный. Объем пирамиды составляет третью часть объема этого параллелепипеда. Пусть ребра описанного параллелепипеда a, b, c .
6. (Неравенства между средними) Внутри треугольника ABC отметили точку M . Известно, что $AM = a$; $BM = b$; $CM = c$. Могли ли площади треугольников AMB , BMC , CMA оказаться равными a^2 , b^2 , c^2 соответственно.
7. (Неравенства между средними) Найдите на интервале $(-1; 1)$ наименьшее значение функции $y = \frac{1}{\sqrt[n]{1-x}} + \frac{1}{\sqrt[n]{1+x}}$.
8. (Неравенства между средними) Пусть a, b - положительные числа. Найдите наибольшее значение выражения $\frac{a^2 + ab + b^2}{a^2 - ab + b^2}$.
9. (Выделение квадрата) Пусть a, b - вещественные числа. Найдите наименьшее значение функции $f(x) = (x + a + b)(x + a - b)(x - a + b)(x - a - b)$.

Домашнее задание:

10. (Неравенства между средними) Даны числа $x, y \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Найдите максимальное значение выражения $A = \frac{\sqrt{\cos x \cdot \cos y}}{\sqrt{\operatorname{ctg} x} + \sqrt{\operatorname{ctg} y}}$.
11. (Оценка слагаемых) Найдите наибольшее значение выражения $\sqrt{x_1 - 1} + \sqrt{x_2 - 1} + \dots + \sqrt{x_{2023} - 1}$, если $x_1, x_2, \dots, x_{2023} \geq 1$ и $x_1 + x_2 + \dots + x_{2023} = 4046$.
12. (Неравенства между средними) Докажите, что из всех треугольников данного периметра, наибольшую площадь имеет равносторонний треугольник.

Решение задач.

Задача 1.

Положительные числа a, b, c таковы, что $abc > 1$, $a + b + c < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$. Доказать, что ровно одно из этих чисел a, b, c меньше единицы.

Решение:

Рассмотрим многочлен с корнями a, b, c :

$$\begin{aligned} P(t) &= (t-a)(t-b)(t-c) = \\ &= t^3 - t^2(a+b+c) + t(ab+bc+ca) - abc = \\ &= t^3 - \alpha t^2 + \beta t - \gamma \end{aligned}$$

где $\alpha = a + b + c$, $\beta = ab + bc + ca$, $\gamma = abc$

По условию $\gamma > 1$; $\beta > \alpha$.

Для доказательства утверждения, что ровно один корень многочлена меньше единицы, достаточно доказать, что значение многочлена $P(1) > 0$. Действительно, из условия $P(1) = (1-a)(1-b)(1-c) > 0$ следует, что либо все три числа меньше единицы, либо ровно одно. Но так как $abc > 1$, то первый случай невозможен.

Итак, докажем, что $P(1) > 0$.

Отметим, что $\frac{\beta}{\gamma} = \frac{ab+bc+ca}{abc} = \frac{1}{c} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$, что по условию больше $\alpha = a + b + c$, тогда

$\frac{\beta}{\gamma} > \alpha$ и $\beta > \alpha\gamma$, тогда

$$\begin{aligned} P(t) &= (t-a)(t-b)(t-c) = t^3 - \alpha t^2 + \beta t - \gamma \\ P(1) &= (1-a)(1-b)(1-c) = 1 - \alpha + \beta - \gamma > 1 - \alpha + \alpha\gamma - \gamma = (1-\alpha)(1-\gamma) \end{aligned}$$

По условию $\gamma = abc > 1$, остается отметить, что $\alpha > 1$.

Действительно, если сумма трех положительных чисел $\alpha = a + b + c$ меньше единицы, то каждое из слагаемых меньше единицы, значит их произведение меньше единицы (противоречие).

Задача 2.

Для углов α, β, γ справедливо неравенство $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma \geq 2$. Докажите, что $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma \leq \sqrt{5}$.

Решение:

Рассмотрим три вектора $\vec{a}(\cos \alpha; \sin \alpha)$; $\vec{b}(\cos \beta; \sin \beta)$; $\vec{c}(\cos \gamma; \sin \gamma)$.

Отметим, что длины этих векторов равны по 1.

Тогда

$$|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}| = \sqrt{(\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma)^2 + (\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma)^2} \geq \sqrt{(\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma)^2 + 4}$$

С другой стороны $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}| + |\vec{c}| = 3$.

Тогда

$$\sqrt{(\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma)^2 + 4} \leq 3$$

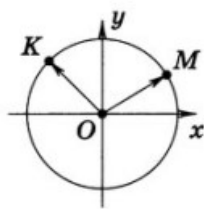
$$(\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma)^2 \leq 9 - 4 = 5$$

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma \leq \sqrt{5}$$

Что и требовалось доказать.

Задача 3.

Известно, что $a^2 + b^2 = 1$ и $c^2 + d^2 = 1$. Докажите, что $ac + bd \leq 1$.



Решение:

Рассмотрим окружность с центром в $O(0;0)$ и радиусом 1. Уравнение этой окружности $x^2 + y^2 = 1$. Рассмотрим точки $M(a; b)$ и $K(c; d)$. Их координаты удовлетворяют уравнению окружности, значит они лежат на окружности. Рассмотрим вектора $\vec{OM}(a; b)$ и $\vec{OK}(c; d)$. Они оба единичные.

Рассмотрим скалярное произведение этих векторов $\vec{OM} \cdot \vec{OK} = ac + bd$. Отметим, что $\vec{OM} \cdot \vec{OK} \leq |\vec{OM}| \cdot |\vec{OK}| = 1$, тогда $ac + bd \leq 1$

Задача 4.

Про пять положительных чисел известно, что если из суммы любых трех из них вычесть сумму двух оставшихся, то разность будет положительной. Доказать, что произведение всех десяти таких разностей не превосходит квадрата произведения данных пяти чисел.

Решение:

Пусть a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 – данные числа. Тогда разобьем произведение десяти таких разностей на пары и воспользуемся формулой разности квадратов:

$$\begin{aligned} (a_1 + a_2 + a_3 - a_4 - a_5)(-a_1 + a_2 - a_3 + a_4 + a_5) = \\ = a_2^2 - (a_1 + a_3 - a_4 - a_5)^2 \leq a_2^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5)(-a_1 - a_2 + a_3 + a_4 + a_5) = \\ = a_4^2 - (a_1 + a_2 - a_3 - a_5)^2 \leq a_4^2 \end{aligned}$$

$$(a_1 - a_2 + a_3 + a_4 - a_5)(a_1 + a_2 - a_3 - a_4 + a_5) =$$

$$= a_1^2 - (a_2 - a_3 - a_4 + a_5)^2 \leq a_1^2$$

$$(-a_1 + a_2 + a_3 + a_4 - a_5)(a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5) =$$

$$= a_3^2 - (a_1 - a_2 - a_4 + a_5)^2 \leq a_3^2$$

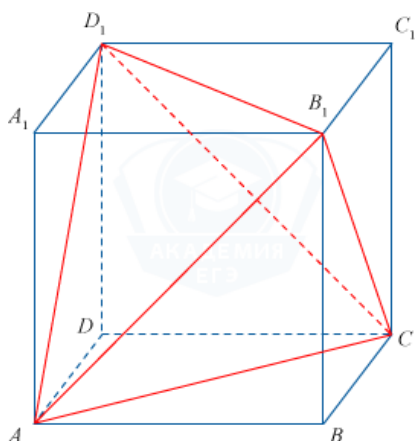
$$(-a_1 + a_2 + a_3 - a_4 + a_5)(a_1 - a_2 - a_3 + a_4 + a_5) =$$

$$= a_5^2 - (a_1 - a_2 - a_3 + a_4)^2 \leq a_5^2$$

Перемножив эти неравенства, получим требуемое.

Задача 5. Найдите наибольшее значение объема треугольной пирамиды, у которой противоположные ребра равны, а сумма длин всех сторон $36\sqrt{2}$.

Решение:



Если провести через каждое ребро пирамиды плоскость, параллельную противоположному ребру, то получится три пары плоскостей, при пересечении которых образуется параллелепипед, называемый описанным. Так как противоположные ребра равны, то в каждой грани диагонали равны между собой, т.е. грани – прямоугольники, а значит этот параллелепипед прямоугольный.

Пусть ребра описанного параллелепипеда a, b, c , тогда его объем равен $V = a \cdot b \cdot c$. Объем пирамиды составляет

третью часть объема этого параллелепипеда, т.е. $V_{\text{пирамиды}} = \frac{a \cdot b \cdot c}{3}$.

Так как $x^2 - 2xy + y^2 \geq 0$, $x^2 + y^2 \geq 2xy$ и $\frac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz}$ (по неравенству о средних, равенство достигается при $x = y = z$), то сделать оценку для суммы длин сторон пирамиды.

$$18\sqrt{2} = \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{b^2 + c^2} + \sqrt{c^2 + a^2} \geq \sqrt{2ab} + \sqrt{2bc} + \sqrt{2ca} \geq$$

$$\geq \sqrt{2} \cdot 3\sqrt[3]{\sqrt{ab} \cdot \sqrt{bc} \cdot \sqrt{ca}} = \sqrt{2} \cdot 3\sqrt[3]{abc} = 3\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{3V_{\text{пирамиды}}}$$

Тогда

$$\sqrt[3]{3V_{\text{пирамиды}}} \leq \frac{18\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}$$

$$V_{\text{пирамиды}} \leq \frac{6^3}{3} = 72$$

Равенство возникает при $a = b = c$

Задача 6. Внутри треугольника ABC отметили точку M . Известно, что $AM = a$; $BM = b$; $CM = c$. Могли ли площади треугольников AMB , BMC , CMA оказаться равными a^2, b^2, c^2 соответственно.

Решение:

Пусть углы между проведенными отрезками равны α, β, γ . Предположим, что площади могли иметь такие величины, тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}ab \sin \alpha + \frac{1}{2}ac \sin \beta + \frac{1}{2}bc \sin \gamma &= S_{AMB} + S_{BMC} + S_{CMA} = \\ &= a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac > \frac{1}{2}ab \sin \alpha + \frac{1}{2}ac \sin \beta + \frac{1}{2}bc \sin \gamma \end{aligned}$$

Получили противоречие, значит наше предположение не верно.

Заметим, что *неравенство между суммой квадратов и попарными произведениями* часто используется в задачах (равенство при $a = b = c$).

Действительно,

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac &= \frac{1}{2}(a^2 - 2ab + b^2 + a^2 - 2ac + c^2 + b^2 - 2bc + c^2) = \\ &= \frac{1}{2}((a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2) \geq 0 \end{aligned}$$

Задача 7. Найдите на интервале $(-1;1)$ наименьшее значение функции $y = \frac{1}{\sqrt[n]{1-x}} + \frac{1}{\sqrt[n]{1+x}}$

Решение: $\frac{1}{\sqrt[n]{1-x}} + \frac{1}{\sqrt[n]{1+x}} \geq \frac{2}{\sqrt[n]{1-x^2}} \geq 2$. Равенство достигается при $x = 0$; $y = 2$

Задача 8. Пусть a, b - положительные числа. Найдите наибольшее значение выражения

$$\frac{a^2 + ab + b^2}{a^2 - ab + b^2}$$

Решение: Выделим целую часть дроби

$$\begin{aligned}\frac{a^2 + ab + b^2}{a^2 - ab + b^2} &= \frac{(a^2 - ab + b^2) + 2ab}{a^2 - ab + b^2} = 1 + \frac{2ab}{a^2 - ab + b^2} = \\ &= 1 + \frac{2}{\frac{a^2 - ab + b^2}{ab}} = 1 + \frac{2}{\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 1} \leq 1 + \frac{2}{2\sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a}} - 1} = 3\end{aligned}$$

Задача 9. Пусть a, b - вещественные числа. Найдите наименьшее значение функции $f(x) = (x+a+b)(x+a-b)(x-a+b)(x-a-b)$

Решение:

$$\begin{aligned}(x+a+b)(x+a-b)(x-a+b)(x-a-b) &= \\ &= (x^2 - (a+b)^2)(x^2 - (a-b)^2) = \\ &= (x^2 - a^2 - b^2 - 2ab)(x^2 - a^2 - b^2 + 2ab) = \\ &= (x^2 - a^2 - b^2)^2 - 4a^2b^2 \geq -4a^2b^2\end{aligned}$$

Равенство достигается при $x = \sqrt{a^2 + b^2}$

Задача 10. Даны числа $x, y \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Найдите максимальное значение выражения

$$A = \frac{\sqrt{\cos x \cdot \cos y}}{\sqrt{\operatorname{ctgx}} + \sqrt{\operatorname{ctgy}}}$$

Решение: Применяя неравенство для среднего гармонического и среднего арифметического, получаем

$$\begin{aligned}A &= \frac{\sqrt{\cos x \cdot \cos y}}{\sqrt{\operatorname{ctgx}} + \sqrt{\operatorname{ctgy}}} = \sqrt{\cos x \cdot \cos y} \cdot \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{\operatorname{tgx}}} + \frac{1}{\sqrt{\operatorname{tgy}}}} \leq \sqrt{\cos x \cdot \cos y} \cdot \frac{1}{4} \cdot (\sqrt{\operatorname{tgx}} + \sqrt{\operatorname{tgy}}) = \\ &= \frac{1}{4} \cdot \sqrt{\cos x \cdot \cos y} \cdot \left(\frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\cos x}} + \frac{\sqrt{\sin y}}{\sqrt{\cos y}} \right) = \frac{1}{4} \cdot (\sqrt{\sin x \cdot \cos y} + \sqrt{\sin y \cdot \cos x})\end{aligned}$$

Заметим, что $\sqrt{a} + \sqrt{b} \leq \sqrt{2(a+b)}$ при любых $a, b \geq 0$.

$$\begin{aligned}\frac{1}{4} \cdot (\sqrt{\sin x \cdot \cos y} + \sqrt{\sin y \cdot \cos x}) &\leq \frac{\sqrt{2}}{4} \sqrt{\sin x \cdot \cos y + \sin y \cdot \cos x} = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4} \sqrt{\sin(x+y)} \leq \frac{\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

Равенство реализуется при $x = y = \frac{\pi}{4}$

Задача 11. Найдите наибольшее значение выражения $\sqrt{x_1-1} + \sqrt{x_2-1} + \dots + \sqrt{x_{2023}-1}$, если $x_1, x_2, \dots, x_{2023} \geq 1$ и $x_1 + x_2 + \dots + x_{2023} = 4046$.

Решение:

Заметим, что для любого x верно $\sqrt{x-1} \geq \frac{(x-1)+1}{2} = \frac{x}{2}$

Тогда

$$\sqrt{x_1-1} + \sqrt{x_2-1} + \dots + \sqrt{x_{2023}-1} \geq \frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2} + \dots + \frac{x_{2023}}{2} = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + \dots + x_{2023}) = \frac{4046}{2} = 2023$$

Задача 12. Докажите, что из всех треугольников данного периметра, наибольшую площадь имеет равносторонний треугольник.

Решение:

По неравенству о средних

$$\sqrt[3]{(p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)} \leq \frac{(p-a) + (p-b) + (p-c)}{3} = \frac{3p - (a+b+c)}{3} = \frac{3p - 2p}{3} = \frac{p}{3}.$$

$$S = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)} \leq \sqrt{p \cdot \left(\frac{p}{3}\right)^3} = \frac{p^2}{3\sqrt{3}}$$

Неравенство обращается в равенство при $(p-a) = (p-b) = (p-c)$, т.е. при $a = b = c$