

Уравнения в целых числах.

Любое уравнение, которое требуется решить в целых числах, называется диофантовым уравнением.

Сравнение левой и правой частей уравнения. Соображения делимости.	<ol style="list-style-type: none"> Докажите, что $7x + 14y = 76$ не имеет целых решений. Существует ли целое число, такое, что $x^3 - 3x^2 + 2x + 2023 = 0$ Решите в целых числах уравнение $2022x + 2023y = 2024$
Линейное диофантово уравнение $ax + by = c$, где $a, b, c \in \mathbb{Z}$ имеет решение тогда и только тогда, когда c делится на НОД чисел a и b . Если $d = \text{НОД}(a, b)$, $a = a_1d$, $b = b_1d$, $c = c_1d$ и (x_0, y_0) – некоторое решение уравнения $ax + by = c$, то все решения задаются формулами $x = x_0 + b_1t$, $y = y_0 - a_1t$, где t – произвольное целое число.	<ol style="list-style-type: none"> (Олимпиада МГУ, 1969) Остаток от деления некоторого натурального числа n на 6 равен 4, остаток от деления n на 15 равен 7. Чему равен остаток от деления числа n на 30?
Метод спуска – это метод решения линейных уравнений в целых числах, основанный на алгоритме Евклида. Метод спуска предполагает сначала последовательное выражение одной переменной через другую, пока в представлении переменной не останется дробей, а затем, последовательное «восхождение» по цепочке равенств, для получения общего решения уравнения.	<ol style="list-style-type: none"> (ЕГЭ, 2010) Найти все целые решения уравнения $113x + 179y = 17$, удовлетворяющие неравенствам $x > 0, y + 100 > 0$.
Разложение на множители	<ol style="list-style-type: none"> Решить в натуральных числах уравнение $xy - 7y + 3x = 39$.
Решения уравнения с двумя переменными как квадратного относительно одной из переменных.	<ol style="list-style-type: none"> Решить в целых числах уравнение $9x^2 + 16xy - 4y^2 = -11$.
<p>Выражение одной переменной через другую и выделении целой части дроби.</p> <p>Если уравнение с двумя переменными является линейным относительно одной из них, то можно попытаться выразить одну переменную через другую, а затем выделить в этом выражении целую часть.</p>	<ol style="list-style-type: none"> Решите в целых числах уравнение $3xy + 2x - 6y - 7 = 0$. Решите в целых числах уравнение $6y^2 + 2xy - 3y - x = 2$

Задачи для самостоятельного решения:

Задача 1. Решить в натуральных числах уравнение: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{3}$

Задача 2: Найти все целые решения уравнения $3x^2 + 4xy - 7y^2 = 13$

Задача 3 (МГУ, 2003) Найти все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих уравнению $2x^2 + 5 = 3y^2 + 5xy$

Задача 4 (МГУ, факультет ВМК, 2009) Найти все натуральные числа n, m, k, l удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} nm + kl = 13 \\ nk - ml = 6 \end{cases}$$

Задача 5 (Олимпиада МАДИ) Найти максимальное натуральное число n , при котором число $13n^2 + 14n + 13$ делится на $n - 15$ без остатка.

Задача 6. (Олимпиада МФТИ) Найти все пары целых чисел $(x; y)$ при которых является верным равенство $x^3 - 6x^2 - xy + 13x + 3y + 7 = 0$.

Домашнее задание:

Задача 1. Существует ли целое число, которое при делении на 12 даёт в остатке 5, а при делении на 8 даёт в остатке 3?

Задача 2. В спортивном магазине продаются велосипеды по цене 9 тыс. рублей и мопеды по цене 34 тыс. рублей. Выручка за день составила 398 тыс. рублей. Сколько велосипедов и сколько мопедов было продано?

Задача 3. Известно, что все члены арифметической прогрессии $\{a_n\}$ являются различными натуральными числами, и что ее второй член в 8 раз больше первого. Найдите третий член этой прогрессии, если известно, что один из ее членов равен 546.