

## Уравнения в целых числах.

Любое уравнение, которое требуется решить в целых числах, называется диофантовым уравнением. Александрийский математик Диофант, живший около 2 тысяч лет тому назад, описал общие методы решения таких уравнений в своей книге «Арифметика». Диофантовы уравнения имеют, как правило, много решений, поэтому их называют неопределенными уравнениями, а решения таких уравнений записывают в общем виде с использованием целочисленного параметра.

Можно условно выделить следующие методы решения диофантовых уравнений: метод полного перебора всех возможных значений переменных, входящих в уравнение; метод разложения на множители; метод, основанный на выражении одной переменной через другую и выделении целой части дроби; методы, основанные на выделении полного квадрата; метод решения уравнения с двумя переменными как квадратного относительно одной из переменных; метод, основанный на оценке выражений, входящих в уравнение; метод, основанный на алгоритме Евклида; метод, основанный на теории цепных дробей; метод, основанный на теории сравнений; метод бесконечного спуска и др.

При подготовке к ЕГЭ (19 задача) и олимпиадам, необходимо уметь решать линейные и квадратные Диофантовы уравнения.

Рассмотрим несколько методов решения линейных уравнений в целых числах.

### Сравнение левой и правой частей уравнения. Соображения делимости.

*Пример 1:* Докажите, что  $7x + 14y = 76$  не имеет целых решений.

*Решение:* Каждое слагаемое левой части уравнения делится на 7, поэтому их сумма делится на 7, а число в правой части уравнения на 7 не делится. Следовательно уравнение не имеет решений в целых числах.

*Пример 2:* Существует ли целое число, такое, что  $x^3 - 3x^2 + 2x + 2023 = 0$

*Решение:* Преобразуем левую часть исходного уравнения:  $x(x-1)(x-2) = -2023$

Левая часть уравнения делится на 6 как произведение трех последовательных чисел, а число 2023 не делится на 6. Следовательно, такого числа не существует.

*Пример 3:* Решите в целых числах уравнение  $2022x + 2023y = 2024$

*Решение:* Перепишем уравнение в виде  $y - 2 = 2022 - 2022x - 2022y$

Каждое слагаемое в правой части делится на 2022, тогда их сумма делится на 2022, значит  $y - 2 = 2022 \cdot k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$

$$y = 2022 \cdot k + 2$$

Но тогда

$$(2022 \cdot k + 2) - 2 = 2022 - 2022x - 2022 \cdot (2022 \cdot k + 2)$$

$$k = 1 - x - (2022 \cdot k + 2)$$

$$x = -2023 \cdot k - 1$$

*Ответ:*  $(-2023 \cdot k - 1; 2022 \cdot k + 2)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$

## Решение линейных диофантовых уравнений с помощью частного решения

В школьных учебниках можно встретить следующую теорему: Линейное диофантово уравнение  $ax+by=c$ , где  $a, b, c \in \mathbb{Z}$  имеет решение тогда и только тогда, когда  $c$  делится на НОД чисел  $a$  и  $b$ . Если  $d=\text{НОД}(a, b)$ ,  $a=a_1d$ ,  $b=b_1d$ ,  $c=c_1d$  и  $(x_0, y_0)$  – некоторое решение уравнения  $ax+by=c$ , то все решения задаются формулами  $x=x_0+b_1t$ ,  $y=y_0-a_1t$ , где  $t$  – произвольное целое число.

*Пример 4. (Олимпиада МГУ, 1969)* Остаток от деления некоторого натурального числа  $n$  на 6 равен 4, остаток от деления  $n$  на 15 равен 7. Чему равен остаток от деления числа  $n$  на 30?

*Решение:* Из условия примера получим систему уравнений 
$$\begin{cases} n = 6k + 4, k \in \mathbb{N} \\ n = 15t + 7, t \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Отсюда  $2k - 5t = 1$ .

Так как  $\text{НОД}(2,5)=1$ , то решение имеется. Найдем какое-нибудь частное решение  $(k,t)$ , например, пара  $(3,1)$  - решение, тогда все остальные решения задаются в виде  $(3+5m, 1+2m)$ ,  $m \in \mathbb{Z}$

Осталось подставить найденные  $(k,t)$  в систему 
$$\begin{cases} n = 6(3+5m) + 4 = 22 + 30m \\ n = 15(1+2m) + 7 = 22 + 30m \end{cases}$$

Следовательно, остаток от деления  $n$  на 30 равен 22.

*Ответ:* 22

## Метод спуска

Метод спуска – это метод решения линейных уравнений в целых числах, основанный на алгоритме Евклида. Метод спуска предполагает сначала последовательное выражение одной переменной через другую, пока в представлении переменной не останется дробей, а затем, последовательное «восхождение» по цепочке равенств, для получения общего решения уравнения.

*Пример 5: (ЕГЭ, 2010)* Найти все целые решения уравнения  $113x + 179y = 17$ , удовлетворяющие неравенствам  $x > 0, y + 100 > 0$ .

*Решение:*

Выберем неизвестное, имеющее наименьший по модулю коэффициент (в нашем случае это

$x$ ), и выразим его через другое неизвестное:  $x = \frac{-179y + 17}{113}$

Выделим целую часть:  $x = \frac{-179y + 17}{113} = \frac{-113y - 66y + 17}{113} = -y + \frac{-66y + 17}{113}$

Очевидно, что  $x$  будет целым, если выражение  $\frac{-66y + 17}{113}$  окажется целым,

что, в свою очередь, будет иметь место тогда, когда число  $-66y + 17$  без остатка делится на 113.

Введем дополнительную целочисленную переменную  $z_1$  следующим образом:

$$-66y + 17 = 113z_1.$$

В результате получили уравнение такого же типа, как и первоначальное, но уже с меньшими коэффициентами.

Далее предлагается повторить все те же действия, только уже с новым уравнением до тех пор, пока представлении переменной не останется дробей.

Вновь выразим переменную с меньшим по модулю коэффициентом и выделим ее целую часть, в данном случае это переменная  $y$ :  $y = \frac{-113z_1 + 17}{66} = -z_1 + \frac{-47z_1 + 17}{66}$ .

Чтобы  $y$  было целым, надо потребовать, чтобы «хвостик»  $\frac{-47z_1 + 17}{66}$  был целым числом, для этого  $-47z_1 + 17$  должно быть кратно 66, тогда введем новую переменную  $z_2 \in \mathbb{Z}$  такую что  $-47z_1 + 17 = 66z_2$ . И рассмотрим теперь уже это уравнение по предложенному алгоритму.

Выразим переменную с наименьшим по модулю коэффициентом:

$z_1 = \frac{17 - 66z_2}{47} = -z_2 + \frac{17 - 19z_2}{47}$ . Потребуем, чтобы «хвостик» был целым, введем новую

целочисленную переменную  $z_3 \in \mathbb{Z}$  такую что  $17 - 19z_2 = 47z_3$ . Выразим переменную с

меньшим по модулю коэффициентом:  $z_2 = \frac{17 - 47z_3}{19} = -2z_3 + \frac{17 - 9z_3}{19}$ . Потребуем, чтобы

«хвостик» был целым, введем новую целочисленную переменную  $z_4 \in \mathbb{Z}$  такую что  $17 - 9z_3 = 19z_4$ .

Выразим переменную с меньшим по модулю коэффициентом:  $z_3 = \frac{17 - 19z_4}{9} = 1 - 2z_4 + \frac{8 - z_4}{9}$ .

Потребуем, чтобы «хвостик» был целым, введем новую целочисленную переменную  $z_5 \in \mathbb{Z}$  такую что  $8 - z_4 = 9z_5$ . Выразим переменную с меньшим по модулю коэффициентом:

$z_4 = 8 - 9z_5$ . Видим, что в представлении переменной нет больше дробей, «спуск» закончен.

Тогда обозначим последнюю введенную переменную  $z_5 = t$ , и начнем «подъем». В обратном порядке возвращаемся к исходным переменным и выражаем их через  $t \in \mathbb{Z}$ .

$$z_4 = 8 - 9z_5 = 8 - 9t$$

$$z_3 = 1 - 2z_4 + \frac{8 - z_4}{9} = 1 - 2(8 - 9t) + \frac{8 - (8 - 9t)}{9} = 19t - 15$$

$$z_2 = -2z_3 + \frac{17 - 9z_3}{19} = -2(19t - 15) + \frac{17 - 9(19t - 15)}{19} = 38 - 47t$$

$$z_1 = -z_2 + \frac{17 - 19z_2}{47} = -(38 - 47t) + \frac{17 - 19(38 - 47t)}{47} = -53 + 66t$$

$$y = -z_1 + \frac{-47z_1 + 17}{66} = -(-53 + 66t) + \frac{-47(-53 + 66t) + 17}{66} = 91 - 113t$$

$$x = -y + \frac{-66y + 17}{113} = -(91 - 113t) + \frac{-66(91 - 113t) + 17}{113} = 179t - 144$$

Решением уравнения в целых числах будут все пары чисел  $(x; y)$  записанные в общем виде  $(179t - 144; 91 - 113t)$ , где  $t \in \mathbb{Z}$ .

Приняв во внимание условия  $x > 0, y + 100 > 0$  находим  $\begin{cases} 179t - 144 > 0 \\ 91 - 113t + 100 > 0 \end{cases}$  т.е.  $t = 1$ , тогда

$$x = 35, y = -22.$$

Ответ:  $x = 35, y = -22$

Здесь сделаем два замечания. Во-первых, решения уравнения может выглядеть по-разному, так как  $t \in \mathbb{Z}$ . Например, запись  $(179t - 144; 91 - 113t)$  и  $(179t - 323; 204 - 113t)$  задают одно и то же множество решений. При первой записи пару решений  $x = 35, y = -22$  мы получаем при  $t = 1$ , а при второй записи эту же пару решений получим при  $t = 2$ .

Во-вторых, такие «глубокие спуски», как представлено в третьем примере, встречаются крайне редко. Давайте решим методом «спуска» уравнение из второго примера:  $2k - 5t = 1$ .

Выбираем меньший по модулю коэффициент,  $2k = 1 + 5t$ , выражаем переменную и выделяем целую часть  $k = \frac{1+5t}{2} = 2t + \frac{1+t}{2}$ , «хвостик» должен быть целым, вводим новую переменную

$m \in \mathbb{Z}$ , где  $m = \frac{1+t}{2}$ , тогда  $1+t = 2m$  и  $t = 2m - 1$ . Спуск закончен, так как в выражении для  $t$  нет дробей. Начинаем подъем. Подставим выражение

$k = 2t + \frac{1+t}{2} = 2(2m - 1) + \frac{1+(2m-1)}{2} = 5m - 2$ . Тогда решением уравнения  $2k - 5t = 1$  в целых

числах будут пары  $(k; t)$  заданные в виде  $(5m - 2; 2m - 1), m \in \mathbb{Z}$ . Понятно, что  $(5m - 2; 2m - 1), m \in \mathbb{Z}$  задает такое же множество решений уравнений, что и  $(3 + 5m; 1 + 2m), m \in \mathbb{Z}$ .

Перейдем теперь методам решения некоторых нелинейных уравнений.

### Разложение на множители

*Пример 6.* Решить в натуральных числах уравнение  $xy - 7y + 3x = 39$ .

*Решение:* При решении нелинейных уравнений, необходимо ограничить перебор различных вариантов. Для этого используют различные методы, например, разложение на множители.

$$xy - 7y + 3x = 39; y(x - 7) + 3x - 21 = 18; y(x - 7) + 3(x - 7) = 18;$$

$$(x - 7)(y + 3) = 18$$

Понимаем, что в скобках стоят целые числа и перебираем все возможные целые множители, произведение которых равно 18. Причем, во второй скобке стоит натуральное число, а множители должны быть одного знака, тогда и первая скобка должна быть положительна, поэтому все варианты с отрицательными множителями нам не подходят.

$$\begin{cases} x - 7 = 2 \\ y + 3 = 9 \end{cases} \quad \begin{cases} x - 7 = 9 \\ y + 3 = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x - 7 = 3 \\ y + 3 = 6 \end{cases} \quad \begin{cases} x - 7 = 6 \\ y + 3 = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x - 7 = 1 \\ y + 3 = 18 \end{cases} \quad \begin{cases} x - 7 = 18 \\ y + 3 = 1 \end{cases} .$$

Выбирая подходящие решения в виде натуральных чисел, получаем следующий ответ:

$$(10; 3), (9; 6), (8; 15).$$

*Ответ:*  $(10; 3), (9; 6), (8; 15)$ .

Этот пример демонстрирует такую идею решения: попытаться представить левую часть уравнения в виде произведения нескольких множителей так, чтобы в правой части при этом получилось целое число. Далее решение обычно предполагает определенный логический перебор, и наша задача, по возможности, сократить этот перебор.

## Решения уравнения с двумя переменными как квадратного относительно одной из переменных.

*Пример:* Решить в целых числах уравнение  $9x^2 + 16xy - 4y^2 = -11$ .

*Решение:* Рассмотрим левую часть уравнения как квадратный трехчлен относительно переменной  $x$  с коэффициентами  $9, 16y, -4y^2$ . Корни такого квадратного трехчлена

$-2y, \frac{2y}{9}$  можно найти, например, по теореме Виета.

Тогда можем разложить многочлен на множители  $9(x+2y)\left(x - \frac{2y}{9}\right) = -11$ , откуда

$$(x+2y)(9x-2y) = -11.$$

Левая часть представляет собой произведение целых чисел, тогда осталось рассмотреть 4 случая:

$$\begin{cases} x+2y=1 \\ 9x-2y=-11 \end{cases} \quad \begin{cases} x+2y=-11 \\ 9x-2y=1 \end{cases} \quad \begin{cases} x+2y=-1 \\ 9x-2y=11 \end{cases} \quad \begin{cases} x+2y=11 \\ 9x-2y=-1 \end{cases}$$

*Ответ:*  $(-1;1)$ ;  $(-1;-5)$ ;  $(1;-1)$ ;  $(1;5)$ .

## Выражение одной переменной через другую и выделении целой части дроби.

Если уравнение с двумя переменными является линейным относительно одной из них, то можно попытаться выразить одну переменную через другую, а затем выделить в этом выражении целую часть.

*Пример 8:* Решите в целых числах уравнение  $3xy + 2x - 6y - 7 = 0$ .

*Решение:* Выразим переменную  $x$  через  $y$ .

$$3xy + 2x = 6y + 7$$

$$x(3y+2) = 6y+7$$

$$x = \frac{6y+7}{3y+2}$$

Выделим целую часть

$$x = \frac{6y+7}{3y+2} = \frac{2(3y+2)+3}{3y+2} = \frac{2(3y+2)}{3y+2} + \frac{3}{3y+2} = 2 + \frac{3}{3y+2}$$

Поскольку числа  $x$  и  $y$  являются целыми, то  $\frac{3}{3y+2}$  должен быть целым. Знаменатель дроби

$3y+2$  является целым числом, значит он должен быть делителем числа 3.

Осталось рассмотреть 4 случая:

$3y+2=1$  не подходит, так как  $y = -\frac{1}{3}$  не целое

$3y+2=-1$ , откуда  $y=-1$  и  $x=-1$

$3y+2=3$  не подходит, так как  $y = \frac{1}{3}$  не целое

$3y+2=-3$  не подходит, так как  $y = -\frac{5}{3}$  не целое

*Ответ:*  $(-1;-1)$

**Пример 9:** Решите в целых числах уравнение  $6y^2 + 2xy - 3y - x = 2$

**Решение:** Это уравнение является линейным относительно переменной  $x$ . Выразим переменную  $x$  через  $y$ .

$$6y^2 - 3y - 2 = x - 2xy$$

$$x(1 - 2y) = 6y^2 - 3y - 2$$

$$x = \frac{6y^2 - 3y - 2}{1 - 2y}$$

Выделим целую часть:

$$x = \frac{6y^2 - 3y - 2}{1 - 2y} = \frac{3y(2y - 1) - 2}{1 - 2y} = -3y - \frac{2}{1 - 2y}$$

Поскольку числа  $x$  и  $y$  являются целыми, то  $\frac{2}{1 - 2y}$  должен быть целым. Знаменатель дроби

$1 - 2y$  является целым числом, значит он должен быть делителем числа 2, т.е. может принимать значения  $\pm 1; \pm 2$ .

Рассмотрим эти четыре случая:

$$1 - 2y = 1, \text{ откуда } y = 0; \quad x = -2$$

$$1 - 2y = -1, \text{ откуда } y = 1; \quad x = -1$$

$$1 - 2y = 2 \text{ не подходит, так как } y = -\frac{1}{2} \text{ не целое}$$

$$1 - 2y = -2 \text{ не подходит, так как } y = \frac{3}{2} \text{ не целое}$$

**Ответ:**  $(-1; 1); (-2; 0)$

### Задачи для самостоятельного решения.

**Задача 1.** Решить в натуральных числах уравнение:  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{3}$

**Задача 2:** Найти все целые решения уравнения  $3x^2 + 4xy - 7y^2 = 13$

**Задача 3** (МГУ, 2003) Найти все пары целых чисел  $(x; y)$ , удовлетворяющих уравнению  $2x^2 + 5 = 3y^2 + 5xy$

**Задача 4** (МГУ, факультет ВМК, 2009) Найти все натуральные числа  $n, m, k, l$  удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} nm + kl = 13 \\ nk - ml = 6 \end{cases}$$

**Задача 5** (Олимпиада МАДИ) Найти максимальное натуральное число  $n$ , при котором число  $13n^2 + 14n + 13$  делится на  $n - 15$  без остатка.

**Задача 6.** (Олимпиада МФТИ) Найти все пары целых чисел  $(x; y)$  при которых является верным равенство  $x^3 - 6x^2 - xy + 13x + 3y + 7 = 0$ .

**Решения задач:**

Задача 1: Решить в натуральных числах уравнение:  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{3}$

Решение: Преобразуем выражение

$$xy - 3x - 3y + 9 = 9$$

$$(x-3)(y-3) = 9$$

Перебираем делители числа 9, получаем ответ.

Ответ: (4;12); (6;6); (12;4)

Задача 2: Найти все целые решения уравнения  $3x^2 + 4xy - 7y^2 = 13$

Решение: Решим уравнение  $3x^2 + 4xy - 7y^2 = 0$  относительно переменной  $x$ .

$$x_1 = \frac{-2y + \sqrt{4y^2 + 21y^2}}{3} = y;$$

$$x_2 = \frac{-2y - \sqrt{4y^2 + 21y^2}}{3} = \frac{-7y}{3};$$

Разложим левую часть исходного уравнения на множители  $(x-y)(3x+7y) = 13$ , где  $x-y$  и  $3x+7y$  - целые числа. Осталось рассмотреть четыре случая

$$\begin{cases} x-y=1 \\ 3x+7y=13 \end{cases} \quad \begin{cases} x-y=-1 \\ 3x+7y=-13 \end{cases} \quad \begin{cases} x-y=13 \\ 3x+7y=1 \end{cases} \quad \begin{cases} x-y=-13 \\ 3x+7y=-1 \end{cases}$$

Решив эти системы уравнений, получим ответ.

Ответ: (2;1), (-2;1)

Задача 3 (МГУ, 2003) Найти все пары целых чисел  $(x; y)$ , удовлетворяющих уравнению  $2x^2 + 5 = 3y^2 + 5xy$

Решение:

Перепишем исходное уравнение в виде  $3y^2 + 6xy - xy - 2x^2 = 5$  и разложим его на множители  $(3y-x)(y+2x) = 5$

Число 5 простое, его делители  $\pm 1; \pm 5$ . Осталось рассмотреть совокупность из четырех систем:

$$\begin{cases} 3y-x=1 \\ y+2x=5 \end{cases} \quad \begin{cases} 3y-x=-1 \\ y+2x=-5 \end{cases} \quad \begin{cases} 3y-x=-5 \\ y+2x=-1 \end{cases} \quad \begin{cases} 3y-x=5 \\ y+2x=1 \end{cases}$$

Учитывая целочисленность решения, получаем следующие пары чисел (2;1); (-2;-1)

Ответ: (2;1); (-2;-1)

Задача 4 (МГУ, факультет ВМК, 2009) Найти все натуральные числа  $n, m, k, l$  удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} nm + kl = 13 \\ nk - ml = 6 \end{cases}$$

Решение: После возведения в квадрат обеих частей уравнений исходной системы получим

$$\begin{cases} n^2m^2 + 2nmkl + k^2l^2 = 169 \\ n^2k^2 - 2nmkl + m^2l^2 = 36 \end{cases}$$

Откуда  $n^2m^2 + k^2l^2 + n^2k^2 + m^2l^2 = 205$  или  $(m^2 + k^2)(n^2 + l^2) = 5 \cdot 41$

Так как числа  $n, m, k, l$  – натуральные числа, можно найти их значения, решив совокупность двух систем уравнений:

$$\begin{cases} m^2 + k^2 = 5 \\ n^2 + l^2 = 41 \end{cases} \quad \begin{cases} m^2 + k^2 = 41 \\ n^2 + l^2 = 5 \end{cases}$$

Первая система уравнений дает следующие решения:

$$\begin{cases} n = 5; \\ m = 2; \\ k = 1; \\ l = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} n = 4; \\ m = 2; \\ k = 1; \\ l = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} n = 5; \\ m = 1; \\ k = 2; \\ l = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} n = 4; \\ m = 1; \\ k = 2; \\ l = 5 \end{cases}$$

Полученные решения должны удовлетворять исходной системе уравнений. Проверка показывает, что подходит только решение

$$\begin{cases} n = 5; \\ m = 1; \\ k = 2; \\ l = 4 \end{cases}$$

Аналогично из второй системы уравнений получим решения

$$\begin{cases} n = 2; \\ m = 4; \\ k = 5; \\ l = 1 \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } \begin{cases} n = 5; \\ m = 1; \\ k = 2; \\ l = 4 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} n = 2; \\ m = 4; \\ k = 5; \\ l = 1 \end{cases}$$

**Задача 5 (Олимпиада МАДИ)** Найти максимальное натуральное число  $n$ , при котором число  $13n^2 + 14n + 13$  делится на  $n - 15$  без остатка.

**Решение:** Преобразуем исходное выражение:

$$\frac{13n^2 + 14n + 13}{n - 15} = \frac{13n(n - 15) + 209(n - 15) + 3148}{n - 15} = 13n + 209 + \frac{3148}{n - 15}$$

Отсюда следует  $n - 15 = 3148$ ;  $n = 3163$

**Задача 6. (Олимпиада МФТИ)** Найти все пары целых чисел  $(x; y)$  при которых является верным равенство  $x^3 - 6x^2 - xy + 13x + 3y + 7 = 0$ .

**Решение:** Уравнение является линейным относительно переменной  $y$ , выразим переменную  $y$  через переменную  $x$  и выделим целую часть.

$$\begin{aligned} y &= \frac{x^3 - 6x^2 + 13x + 7}{x - 3} = \frac{x^2(x - 3) - 3x(x - 3) + 4(x - 3) + 19}{(x - 3)} = \\ &= x^2 - 3x + 4 + \frac{19}{x - 3} \end{aligned}$$

Так как числа  $x$  и  $y$  - целые, то дробь  $\frac{19}{x - 3}$  должна быть целым числом. Тогда  $x - 3$

является целым делителем 19. Возможны 4 случая:  $x - 3 = 1$ ;  $x - 3 = -1$ ;  $x - 3 = 19$ ;  $x - 3 = -19$ .

Ответ: (4;27); (2;-17); (22;423); (-16;307)

Решение домашнего задания:

**Задача 1.** Существует ли целое число, которое при делении на 12 даёт в остатке 5, а при делении на 8 даёт в остатке 3?

**Решение:** Если число  $a$  при делении на 12 даёт остаток 5, то  $a = 12n + 5$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ .

Аналогично  $a = 8k + 3$ , где  $k \in \mathbb{Z}$ . Приравняем значения для  $a$  и решим уравнение в целых числах.

$12n + 5 = 8k + 3 \Leftrightarrow 12n - 8k = -2$  – решений нет, так как левая часть кратна 4, а правая – нет.

**Ответ:** Не существует.

**Задача 2.**

В спортивном магазине продаются велосипеды по цене 9 тыс. рублей и мопеды по цене 34 тыс. рублей. Выручка за день составила 398 тыс. рублей. Сколько велосипедов и сколько мопедов было продано?

**Решение:** Пусть продали  $x$  велосипедов и  $y$  мопедов, заметим, что  $x, y \in \mathbb{N}$ . Осталось решить уравнение  $9x + 34y = 398$ . Используем метод спуска. Выразим переменную с

меньшим по модулю коэффициентом  $x = \frac{398 - 34y}{9} = \frac{396 + 2 - 27y - 7y}{9} = 44 - 3y + \frac{2 - 7y}{9}$ .

Чтобы  $x$  было целым, необходимо, чтобы  $2 - 7y$  было кратно 9. Введем переменную  $k \in \mathbb{Z}$ , такую что  $2 - 7y = 9k$ . Повторим все предыдущие действия с новым уравнением. Выразим

переменную с наименьшим по модулю коэффициентом  $y = \frac{2 - 9k}{7} = -k + \frac{2 - 2k}{7}$  и потребуем,

чтобы  $\frac{2 - 2k}{7} = n \in \mathbb{Z}$ , тогда  $2 - 2k = 7n$ . Повторим действия с новым уравнением. Выразим

переменную  $k$ :  $k = \frac{2 - 7n}{2} = 1 - 3n - \frac{n}{2}$ . Введем переменную  $m \in \mathbb{Z}$ , такую что  $\frac{n}{2} = m$ .

Получаем  $n = 2m$ , спуск закончен. Начинаем в обратном порядке выражать все переменные

через  $m \in \mathbb{Z}$ .  $k = \frac{2 - 7n}{2} = \frac{2 - 7(2m)}{2} = 1 - 7m$ .  $y = \frac{2 - 9k}{7} = \frac{2 - 9(1 - 7m)}{7} = -1 + 9m$ .

$x = \frac{398 - 34y}{9} = \frac{398 - 34(9m - 1)}{9} = 48 - 34m$ . Решением уравнения будут пары вида

$(48 - 34m, 9m - 1), m \in \mathbb{Z}$ . Используем условие  $x, y \in \mathbb{N}$ , тогда подходит только  $m = 1$ , т.е. единственная пара решений  $(14, 8)$ .

**Ответ:** 14 велосипедов и 8 мопедов.

**Задача 3.** Известно, что все члены арифметической прогрессии  $\{a_n\}$  являются различными натуральными числами, и что ее второй член в 8 раз больше первого.

Найдите третий член этой прогрессии, если известно, что один из ее членов равен 546.

**Решение:**

в) Если первый член прогрессии равен 546, то третий найдем по формуле:

$$a_3 = a_1(7 \cdot 3 - 6) = 546 \cdot 15 = 8190.$$

Пусть теперь  $a_1 \neq 546$ . Тогда  $a_{n+1} = a_1(7(n+1) - 6) = a_1(7n+1) = 546$ ,  $a_1 = \frac{546}{(7n+1)} = \frac{7 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 13}{(7n+1)}$ .

Заметим, что  $(7n+1)$  на 7 не делится. Далее можно рассмотреть остальные натуральные множители числа 546 и перебрать варианты произведения любых двух множителей или всех трех.  $(7n+1) = 2 \cdot 3 \cdot 13$  при  $n = 11$ . Тогда  $a_1 = \frac{7 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 13}{(7 \cdot 11 + 1)} = 7$ .

Нас просят найти третий член последовательности  $a_3 = a_1(7 \cdot 3 - 6) = 7 \cdot 15 = 105$ .

Тогда, если один из членов прогрессии равен 546, то третий член прогрессии может быть либо 8190, либо 105.

*Ответ:* 8190 или 105