

I На протяжении многовековой истории развития математики людей интересовал вопрос о теореме Пифагора и о различных способах её доказательства. Причина такой популярности теоремы - её простота, красота и неоспоримая ценность. Недаром И. Кеплер, немецкий математик, астроном, первооткрыватель законов движения планет Солнечной системы, назвал теорему Пифагора “сокровищем” и сравнил её “с мерой золота”.

(Для учителя: безусловно, изучение теоремы Пифагора делает урок более интересным и значимым. В современных школьных учебниках рассматриваются традиционные доказательства теоремы Пифагора. Пусть так. Но, знакомясь с биографией Пифагора и изучая саму теорему, удивляет количество способов её доказательства.

Кроме того, возможно проблема современного школьника видится мною в неумении соотносить полученные теоретические знания с решением практических задач, падении интереса к математике. Я считаю, теорема Пифагора способствует весьма успешному решению этой проблемы. Также мой материал, в силу его систематизированности, может помочь преподавателю в подготовке по данной теме. Полагаю также, что данная тема актуальна, так как теорема Пифагора является обязательной для изучения теоремой во всех школах.

Ниже следующий материал доступен ученикам 8 – 11 классов. С ней можно ознакомиться, её можно использовать, как во внеурочной деятельности, так и непосредственно на уроках. Уверена, что эти знания вызовут повышенный интерес к урокам математики).

II О знаменитом геометре.

1. Из истории знаменитой теоремы.

История теоремы Пифагора уходит в глубокую древность. Упоминания о ней содержатся ещё в вавилонских клинописных текстах времён царя Хаммурапи (XVIII век до н. э.), то есть за 1200 лет до рождения Пифагора. Теорема применялась как готовое правило во многих задачах, самая простая из которых — нахождение диагонали квадрата по его стороне. Не исключено, что соотношение $a^2 + b^2 = c^2$ для произвольного прямоугольного треугольника вавилоняне получили, попросту «обобщив» равенство $a^2 + a^2 = c^2$. Но им это простительно — для практической геометрии древних, сводившейся к измерениям и вычислениям, строгих обоснований не требовалось.

Теперь, почти 4000 лет спустя, мы имеем дело с теоремой-рекордсменом по количеству всевозможных доказательств. Между прочим, их коллекционирование — давняя традиция. Пик интереса к теореме Пифагора пришёлся на вторую половину XIX — начало XX столетия. И если первые коллекции содержали не более двух-трёх десятков доказательств, то к концу XIX века их число приблизилось к 100, а ещё через полвека превысило 360, и это только тех, что удалось собрать по разным источникам. Кто только не брался за решение этой нестареющей задачи — от именитых учёных и популяризаторов науки до конгрессменов и школьников. И что примечательно, в оригинальности и простоте решения иные любители не уступали профессионалам!

Самым древним из дошедших до нас доказательств теоремы Пифагора около 2300 лет. Одно из них — строгое аксиоматическое — принадлежит древнегреческому математику Евклиду, жившему в IV—III веках до н. э. В I книге «Начал» теорема Пифагора значится как «Предложение 47». Самые наглядные и красивые доказательства построены на перекраивании «пифагоровых штанов». Они выглядят как хитроумная головоломка на разрезание квадратов. Заставьте фигуры правильно двигаться — и они откроют вам секрет знаменитой теоремы!

2. Первый математик.

Пифагора Самосского (около 570—490 годов до н. э.) — древнегреческого философа, математика, теоретика музыки и мистика, создателя религиозно-философской школы пифагорейцев, чьё имя давно и неразрывно связано с замечательной теоремой, в известном смысле можно назвать первым математиком. Именно с его математики начинается как точная наука, где всякое новое знание — результат не наглядных представлений и вынесенных из опыта правил, а итог логических

рассуждений и выводов. Лишь так можно раз и навсегда установить истинность любого математического предложения.

До Пифагора дедуктивный метод применял только древнегреческий философ и учёный Фалес Милетский, живший на рубеже VII—VI веков до н. э. Он высказал саму идею доказательства, но применял его не систематически, избирательно, как правило, к очевидным геометрическим утверждениям типа «диаметр делит круг пополам».

Пифагор продвинулся гораздо дальше. Считается, что он ввёл первые определения, аксиомы и методы доказательства, а также создал первый курс геометрии, известный древним грекам под названием «Предание Пифагора». А ещё он стоял у истоков теории чисел и стереометрии.

Другая важная заслуга Пифагора — основание славной школы математиков, которая более столетия определяла развитие этой науки в Древней Греции. С его именем связывают и сам термин «математика» (от греческого слова *μαθημα* — учение, наука), объединивший четыре родственные дисциплины созданной Пифагором и его приверженцами — пифагорейцами — системы знаний: геометрию, арифметику, астрономию и гармонику. Отделить достижения Пифагора от достижений его учеников невозможно: следуя обычаю, они приписывали собственные идеи и открытия своему Учителю. Никаких сочинений ранние пифагорейцы не оставили, все сведения они передавали друг другу устно. Так что 2500 лет спустя историкам не остаётся ничего иного, кроме как реконструировать утраченные знания по переложениям других, более поздних авторов. Отдадим должное грекам: они хоть и окружали имя Пифагора множеством легенд, однако не приписывали ему ничего такого, чего он не мог бы открыть или развить в теории. И носящая его имя теорема не исключение.

3. О биографии Пифагора. Факты, легенды и мифы.

Античные биографии Пифагора содержат множество легенд. По наиболее распространённой версии, Пифагор родился на острове Самос. В молодости много путешествовал и учился. Пифагор был учёным, открывшим миру загадочную науку геометрию. Большинству он известен своей теоремой. Но это далеко не всё, чем может похвастать древнегреческий философ. Он создал целое религиозное течение, стал его духовным лидером. В нём видели посланника Небес. Для пифагорейцев математика была божественными откровениями, зашифрованными в формулах и числах, недоступных пониманию непосвящённых. Однако многие жители Древней Греции, впервые столкнувшиеся с мудростью учёного, реагировали именно так.

Биография Пифагора содержит множество легенд. Античные источники содержат противоречивые сведения о путешествиях молодого Пифагора в разные страны, где он изучал восточные математику и астрономию, а также познакомился с негреческими религиозными культами. В частности, в IV веке до н. э. Пифагору приписывали посещение Египта.

Об учителях Пифагора ничего определённого утверждать нельзя. Наиболее часто как учителей Пифагора указывают Ферекида, Фалеса, Анаксимандра и Анаксимена.

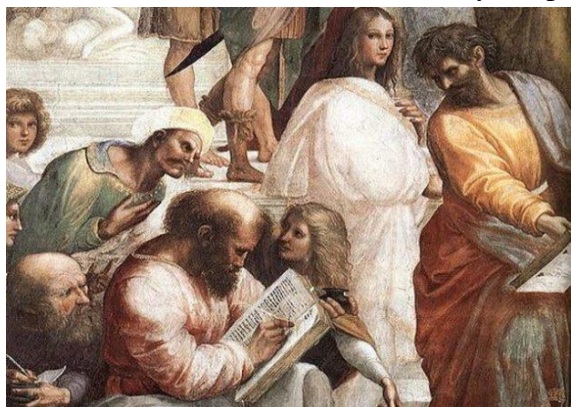
По некоторым источникам Пифагор покинул Самос из-за несогласия с тиранической властью Поликрата, тирана греческого островного города Самос, в 40-летнем возрасте. Поликрат пришёл к власти в 538 году до н. э. Мотивы Пифагора до конца не ясны. По некоторым источникам, Пифагор был изгнан как представитель аристократии, с которой боролся Поликрат. Пифагор отплыл из Самоса через несколько лет после прихода к власти Поликрата. Возможно, политические амбиции и особенности учения Пифагора ему пришлось не по нраву. Возможно, Пифагор решил, что на чужбине он добьётся больших успехов в претворении своего учения в жизнь. Когда Пифагор прибыл в греческую колонию на юге Апеннинского полуострова Кротон, он выступил перед старейшинами, затем — перед остальным народом полиса. С течением времени вокруг него сформировалась группа сторонников, вероятно, в основном представители аристократической молодёжи. Их организация называлась «школой», но по своей сути напоминала монастырь. Адепты Пифагора клялись в том, что будут стремиться к познанию истины, что предполагало в том числе религиозные обряды, аскетический образ жизни, изучение философии. Античные источники сообщают, что их имущество становилось общим. Распорядок их дня был чётко регламентирован и включал в себя совместные трапезы, прогулки и обучение. Неофиту надлежало пять лет провести в молчании, лишь слушая то, что говорят его старшие товарищи и Пифагор.

Постепенно возрастало политическое влияние «пифагорейской школы». Она как таковая не находилась при власти. Речь шла о возросшем влиянии отдельных членов общества в городских органах власти. Первым важным событием, в котором оно проявилось, стала война между Кротонем и Сибарисом. После того, как в Сибарисе захватил власть тиран Телис, его противники бежали в Кротон. Кротонский совет под влиянием Пифагора отказал посольству из Сибариса выдать беглецов.

В последующей войне кротонское войско под командованием пифагорейца Милона около 510 года до н. э. разбило сибаритов. Сибарис был разграблен и разрушен. После победы Кротон стал самым могущественным среди городов юга Италии. Другие полисы стали его вынужденными союзниками. Однако такая власть некоего тайного общества пифагорейцев вызвала недовольство. Оно вылилось в заговор Килона, который использовал недовольство граждан авторитарной политикой пифагорейцев и, возможно, несправедливым, по их мнению, дележом отобранной у сибаритов земли. Постепенно возрастало политическое влияние «пифагорейской школы», в храме муз Метапонта. Власть некоего тайного общества пифагорейцев вызывала недовольство. Оно вылилось в заговор Килона, который вместе со сторонниками напал на собрание пифагорейцев. Существует несколько легенд относительно дальнейшей судьбы Пифагора. Большинство из них завершается тем, что философ умер в храме муз Метапонта. Несмотря на смерть Пифагора и разгром общества в Кротоне, пифагореисты продолжили свою деятельность в других полисах античного мира.

Пифагор и его ученики. Пифагор возглавил культ поклонения числам.

Начать список интересных фактов из жизни великого древнегреческого учёного Пифагора надо с самых известных моментов. Так, у Пифагора были последователи. Целая группа математиков не

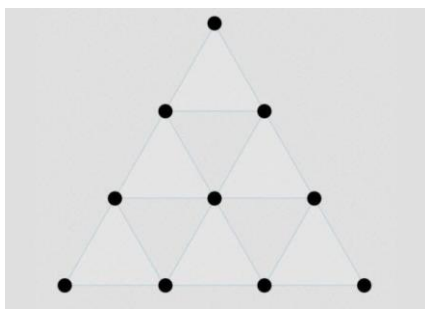


боялась далёких походов и долгих проверок, чтобы попасть к нему в ученики. Их общей целью была помощь учителю в познании тайн Вселенной. Но мало кто понимает, что это были не просто общество ценителей точных наук. Нет — это была полноценная религия.

По мнению Пифагора, числа были основой всего сущего. Он учил своих последователей, что мир контролируется математическими гармониями, составляющими реальность. Более того, эти числа почитались как боги. У пифагорейцев каждая цифра и их последовательность имела сакральный смысл: 7 было числом мудрости, 8 — правосудия, а 10

считалось числом высшего порядка. Всё в математике для них было свято. При решении очередной математической задачи, пифагорейцы прославляли богов и приносили им в жертву быка (не всегда, но достаточно часто). Остальные греки находили подобное поведение чуждым и даже опасным для общества. Страх усиливали сами учёные-культисты. Дошло до того, что непосвящённые греки сожгли дом Пифагора и изгнали его из родного города, опасаясь его мистической власти над числами.

Священный треугольник. Последователи Пифагора молились числу 10.



Ещё один интересный факт заключается в том, что у пифагорейцев был священный символ, называемый Тетрактис. Это был треугольник с 10 точками в четырёх рядах, демонстрирующий совершенство и математическую точность организации пространства и вселенной. Десять, считали они, это номер высшего порядка, который воплощал смысл всего материального и духовного. И они буквально поклонялись этому символу.

Последователи Пифагора читали молитву, обращённую к числу 10: «Благослови нас, божественное число, ты, которое порождало богов

и людей! Ибо божественное число начинается с глубокого чистого единства, пока оно не доходит до святой четвёрки. Тогда она порождает мать всех, всеохватывающую, первородную, никогда не отклоняющуюся, никогда не утомляющую святую десятку, ведущую всех».

Каждый «адепт» был обязан ежедневно повторять эти слова. Если кто-либо хотел присоединиться к пифагорейцам, он должен был принести клятву святому треугольнику, «этому чистому, святому, четырехбуквенному имени на высоте», что переводится как «тетрактис». Затем они приносили клятву самому Пифагору, который, подобно Прометею математики, «принёс смертным Тетрактис». Видно, жизнь философа не была обделена вниманием.

Вознесение хвалы Пифагора. Его считали сыном бога.



Следующий факт из жизни знаменитого грека отличается некой мистичностью. Последователи Пифагора действительно верили, что он был полубогом. Они называли его «божественным Пифагором» и всерьёз доказывали людям, что его отцом был один из Олимпийцев (Гермес либо Аполлон). Версии расходились, но в его высшем начале не сомневался никто из адептов. У последователей даже были гимны, восхваляющие божественность Пифагора: «Питий, прекраснейший из племени

самийцев», или «Вышедший из объятий Бога Дня, величественный Пифагор, друг Юпитера!».

Пифагорейцы творили вокруг Пифагора мифы и легенды, наделяя его сверхспособностями.

Говорили, что он может приручить орлов и медведей одним лишь прикосновением. И даже больше: он мог контролировать любое животное силой своего голоса. Вдобавок Пифагор мог писать слова на лике Луны.

Одна из самых известных легенд повествует, что одно из его бёдер было золотым. Согласно одной истории, он получил от священника в награду магический золотой дротик, который позволял ему летать над горами, изгонять болезни и успокаивать бури. Весьма интересный факт из биографии Пифагора, достойный знаменитых греческих легенд.

Пророчества Пифагора. Пифагор рассказывал людям, что возродится после смерти.



Дело было не в том, что людей просто так захлестнуло увлечение поисками гипотенузы и они начали сочинять небылицы о Пифагоре. Он сам толкал их к этому и поощрял. Пифагор вписывал в свою биографию невероятные факты и прямо заявлял людям, что, например, он был сыном бога и неоднократно перевоплощался, пока не достиг своей «пифагорской» формы.

Математик утверждал, что он был сыном Гермеса, который предложил Пифагору любой подарок, кроме дара бессмертия. Учёный просил сохранить свои воспоминания в каждой жизни и теперь мог вспомнить до мельчайших

подробностей каждую ипостась своей биографии. Он боролся с Ахиллесом в Троянской войне. Он был скромным рыбаком. И т.д.

Подношение даров. Он был одним из первых вегетарианцев.



Интересный факт о жизни философа, в который мало кто верит: Пифагор был одним из первых людей в западной истории, который воздерживался от употребления мяса по моральным убеждениям. Тот, кто ест мёртвых, учил он своих последователей, загрязняет своё тело и разум.

Поэтому человек, по его представлениям, никогда не должен убивать живое существо.

Однако его правила были немного странными и избирательными: принесение в жертву волов никто не отменял. В непреложном правиле отказа пифагорейцев от мясоедства были лазейки.

Основная идея была в том, что курицы, козы и свиньи считались пифагорецами неодушевлёнными, а значит, их можно было употреблять в пищу. При этом Диоген запрещал есть ягнят. И таких спорных моментов было достаточно много, так что даже греки воспринимали идеи такого своеобразного отказа от мяса как некую придурь.

У него были правила на все случаи жизни.

Очень интересный и всем известный факт о жизни учёного: Пифагор жутко любил придумывать



правила. Он ввёл для своих последователей ряд невероятно строгих и специфических инструкций практически для всего, к примеру,

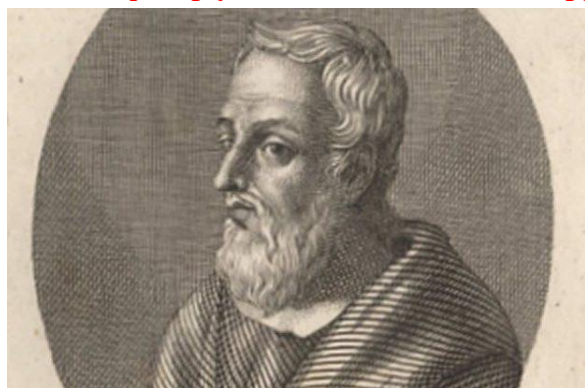
новые ученики должны были проводить в молчании пять лет.

Пифагор трепетно относился к молчанию. По мнению Пифагора, молчание было очень важным. Сохранение спокойствия — способ научиться самообладанию. Поэтому он следил за тем, чтобы желающие присоединиться к его культу умели молчать.

По замыслу, это должно было помочь людям оставаться чистыми. Но логично предположить, что существовали и более прагматичные причины: даже в Древней Греции нельзя называть себя сыном бога и заставлять людей поклоняться цифрам, но при этом считаться образцовым гражданином. Пифагорейцы старались оградить себя от лишних вопросов, так что любой, кто не мог держать язык за зубами, автоматически отсеивался. Впрочем, обычные греки сами сторонились нелюбимых и молчаливых математиков.



Пифагор утопил человека из-за иррациональных чисел



В биографии Пифагора есть и устрашающие факты.

Одним из самых известных последователей Пифагора был Гиппас. Легенда гласит, что он был первым человеком, который доказал существование иррационального числа — и он вполне мог умереть за своё открытие.

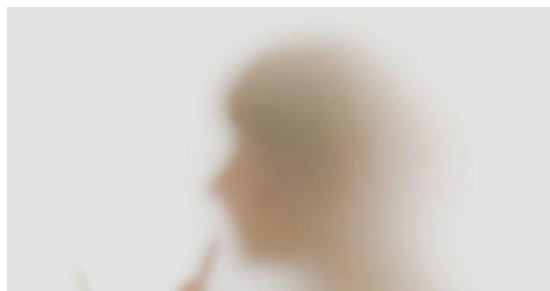
Гиппас нашёл доказательство, которое показало, что квадратный корень из числа 2 — иррациональное число. Это стало больше, чем просто крупным открытием — это выглядело как открытое восстание. Пифагор учил, что все числа могут быть выражены как отношения

целых чисел, и Гиппас доказал ошибочность своего божественного учителя.

Согласно легенде, Гиппас показал свои доказательства Пифагору, когда они были на лодке. В ответ Пифагор схватил талантливого ученика и засунул его голову в воду и держал в таком положении, пока несчастный не перестал подавать признаков жизни. Тогда Пифагор выбросил безжизненное тело за борт, повернулся к остальным на борту и предупредил, чтобы они никогда не рассказывали кому-либо о произошедшем. Возможно, эта история является искажённой версией пифагорейской басни, в которой говорится, что Гиппас был утоплен богами в наказание за раскрытие секретов иррациональных чисел миру.

Интересный факт из биографии или выдуманная впечатлительными последователями легенда, точно неизвестно. Но эта история доказывает жутковатость культа Пифагора. Его последователи распространяли эту страшилку как притчу — предупреждение: если кто-либо из посвящённых разболтает их секреты, то такого ждёт крайне печальный конец.

Знаменитый грек предпочитал «вещать», находясь за экраном из ткани



Ещё один факт из биографии древнего грека заключался в его скрытности и желании превознести себя. Существовали два типа пифагорейцев: *akousmatikoi* и *mathematikoi*.

Математики были ближайшими и наиболее доверенными последователями Пифагора. Он лично встречался с ними и подробно объяснял свои теоремы. Им было позволено узнать тайны математики, которые были скрыты от остального мира.

Приближенным приходилось платить высокую цену за эту привилегию. Чтобы стать *mathematikoi*, человек должен был от много отказаться. С этого момента их преданность учителю была бесконечной.

Остальным разрешалось быть *akousmatikoi* — последователями, которым никогда не позволялось видеть лицо Пифагора. Когда он говорил с ними, то прятался за ширмой, как Волшебник из страны

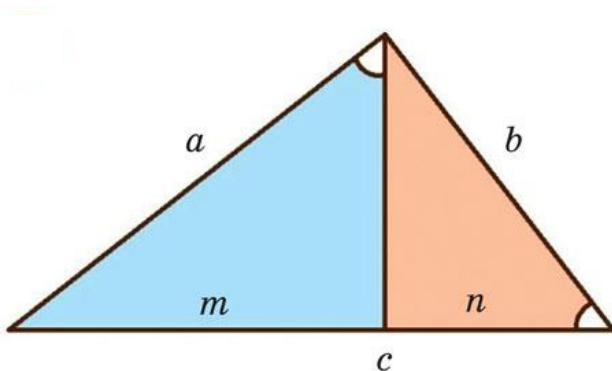
Оз. Таким ученикам ничего не объяснилось в деталях. Им запрещалось доверять опасные секреты высшей математики.

Можно сказать, что великий математик был эксцентричным. Впрочем, чудаковатость и необычность всегда позволялась гениям.

4. Такое простое доказательство

Неизвестно, Пифагор сам обнаружил соотношение между длинами сторон в прямоугольном треугольнике или позаимствовал это знание. Античные авторы утверждали, что сам, и любил пересказывать легенду о том, как в честь своего открытия Пифагор принёс в жертву быка. Современные историки склонны считать, что он узнал о теореме, познакомившись с математикой вавилонян. Не знаем мы и о том, в каком виде Пифагор формулировал теорему: арифметически, как принято сегодня, — квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов, или геометрически, в духе древних, — квадрат, построенный на гипотенузе прямоугольного треугольника, равновелик сумме квадратов, построенных на его катетах.

Доказательство 0. *Подобие.*



Считается, что именно Пифагор дал первое доказательство теоремы, носящей его имя. Оно, конечно, не сохранилось. По одной из версий, Пифагор мог воспользоваться разработанным в его школе учением о пропорциях. На нём основывалась, в частности, теория подобия, на которую опираются рассуждения.

Проведём в прямоугольном треугольнике с катетами a и b высоту к гипотенузе c . Получим три подобных

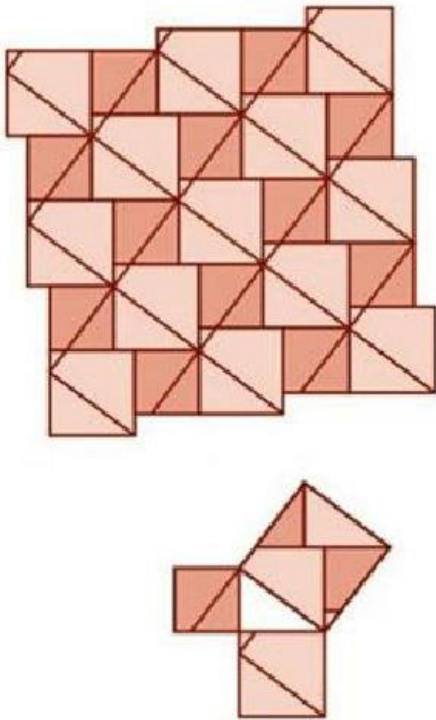
треугольника, включая исходный. Их соответствующие стороны пропорциональны, $\frac{a}{c} = \frac{m}{a}$ и $\frac{b}{c} = \frac{n}{b}$, откуда $a^2 = c \cdot m$ и $b^2 = c \cdot n$. Тогда $a^2 + b^2 = c \cdot (m + n) = c^2$ (рис.).

Это всего лишь реконструкция, предложенная одним из историков науки, но доказательство, согласитесь, совсем простое: занимает всего-то несколько строк, не нужно ничего достраивать, перекраивать, вычислять... Неудивительно, что его не раз переоткрывали. Оно содержится, например, в «Практике геометрии» Леонардо Пизанского (1220), и его до сих пор приводят в учебниках.

Такое доказательство не противоречило представлениям пифагорейцев о соизмеримости: изначально они считали, что отношение длин любых двух отрезков, а значит, и площадей прямолинейных фигур, можно выразить с помощью натуральных чисел. Никакие другие числа они не рассматривали, не допускали даже дробей, заменив их отношениями 1 : 2, 2 : 3 и т. д. Однако, по иронии судьбы, именно теорема Пифагора привела пифагорейцев к открытию несоизмеримости диагонали квадрата и его стороны. Все попытки численно представить длину этой диагонали — у единичного квадрата она равна $\sqrt{2}$ — ни к чему не привели. Проще оказалось доказать, что задача неразрешима. На такой случай у математиков есть проверенный метод — доказательство от противного. Кстати, и его приписывают Пифагору.

Существование отношения, не выражаемого натуральными числами, положило конец многим представлениям пифагорейцев. Стало ясно, что известных им чисел недостаточно для решения даже несложных задач, что уж говорить обо всей геометрии! Это открытие стало поворотным моментом в развитии греческой математики, её центральной проблемой. Сначала оно привело к разработке учения о несоизмеримых величинах — иррациональностях, а затем — и к расширению понятия числа. Иными словами, с него началась многовековая история исследования множества действительных чисел.

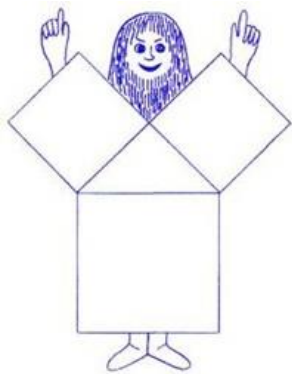
5. Это интересно! Мозаика Пифагора



Если покрыть плоскость квадратами двух разных размеров, окружив каждый малый квадрат четырьмя большими, получится паркет «мозаика Пифагора». Такой рисунок издавна украшает каменные полы, напоминая о древних доказательствах теоремы Пифагора (отсюда его название). По-разному накладывая на паркет квадратную сетку, можно получить разбиения квадратов, построенных на сторонах прямоугольного треугольника, которые предлагались разными математиками. Например, если расположить сетку так, чтобы все её узлы совпали с правыми верхними вершинами малых квадратов, проявятся фрагменты чертежа к доказательству средневекового персидского математика ан-Найризи, которое он поместил в комментариях к «Началам» Евклида. Легко видеть, что сумма площадей большого и малого квадратов, исходных элементов паркета, равна площади одного квадрата наложенной на него сетки. А это означает, что указанное разбиение действительно пригодно для укладки паркета: соединяя в квадраты полученные многоугольники, как показано на рисунке, можно заполнить ими без пробелов и перекрытий всю плоскость.

Некоторые доказательства теоремы Пифагора.

Теорема Пифагора едва ли не самая узнаваемая и, несомненно, самая знаменитая в истории математики. В геометрии она применяется буквально на каждом шагу. Несмотря на простоту формулировки, эта теорема отнюдь не очевидна: глядя на прямоугольный треугольник со сторонами $a < b < c$, усмотреть соотношение $a^2 + b^2 = c^2$ невозможно.



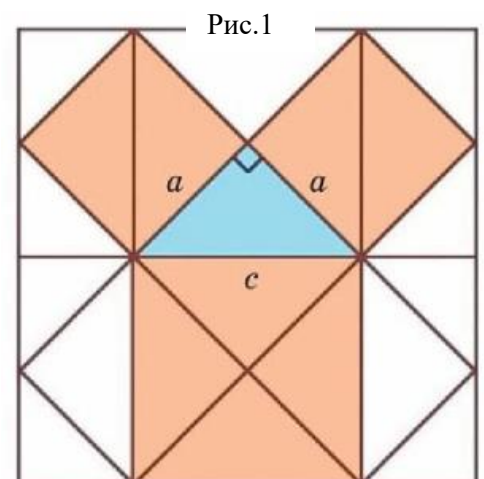
Однажды известный американский логик и популяризатор науки Рэймонд Смаллиан, желая подвести учеников к открытию теоремы Пифагора, начертил на доске прямоугольный треугольник и по квадрату на каждой его стороне и сказал:

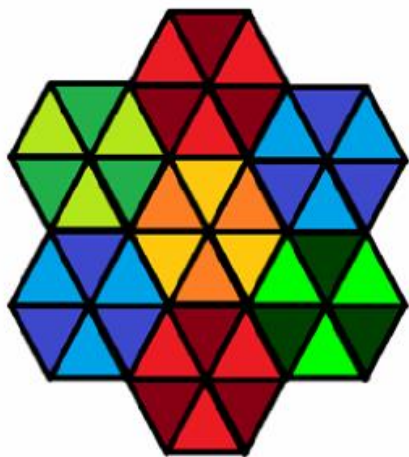
«Представьте, что эти квадраты сделаны из кованого золота и вам предлагают взять себе либо один большой квадрат, либо два маленьких. Что вы выберете?» Мнения разделились пополам, возникла оживлённая дискуссия. Каково же было удивление учеников, когда учитель объяснил им, что никакой разницы нет!

Но стоит только потребовать, чтобы катеты были равны, — и утверждение теоремы станет явным (рис. 1). И кто после этого усомнится, что «пифагоровы штаны» во все стороны равны? А вот те же самые «штаны», только в «сложенном» виде (рис. 2).

Такой чертёж использовал герой одного из диалогов Платона под названием «Менон», знаменитый философ Сократ, разбирая с мальчиком-рабом задачу на построение квадрата, площадь которого в два раза больше площади данного квадрата. Его рассуждения, по сути, сводились к доказательству теоремы Пифагора, пусть и для конкретного треугольника.

$$S_{ABCD} = 4 \cdot S_{\triangle AOD} = 2 \cdot S_{\triangle AOBK}; \quad AD^2 = 2 \cdot AO^2$$





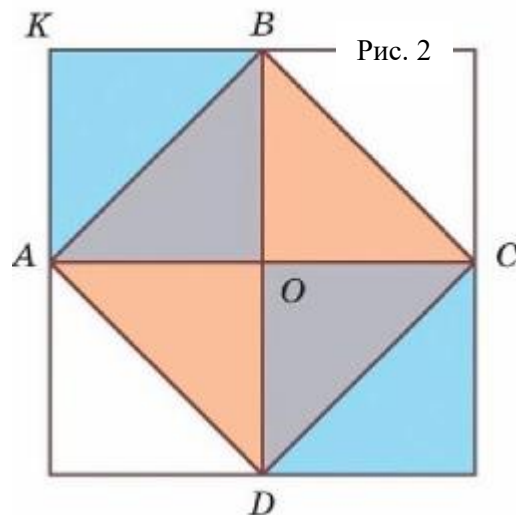
Фигуры, изображённые на рис. 1 и 2, напоминают простейший орнамент из квадратов и их равных частей — геометрический рисунок, известный с незапамятных времён.

Им можно сплошь покрыть плоскость. Математик назвал бы такое покрытие плоскости многоугольниками паркетом, или замощением. При чём тут Пифагор? Оказывается, он первым решил задачу о правильных паркетах, с которой началось изучение замощений различных поверхностей.

Так вот, Пифагор показал, что

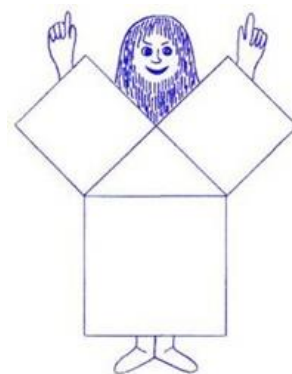
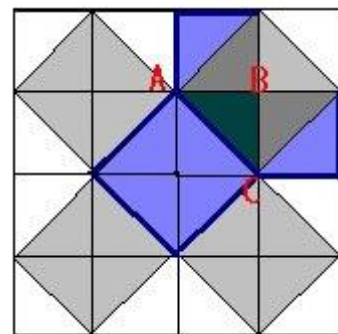
плоскость вокруг точки могут покрыть без пробелов равные правильные многоугольники только трёх видов: шесть треугольников, четыре квадрата и три шестиугольника.

Приведу здесь некоторые наиболее доступные доказательства теоремы Пифагора.



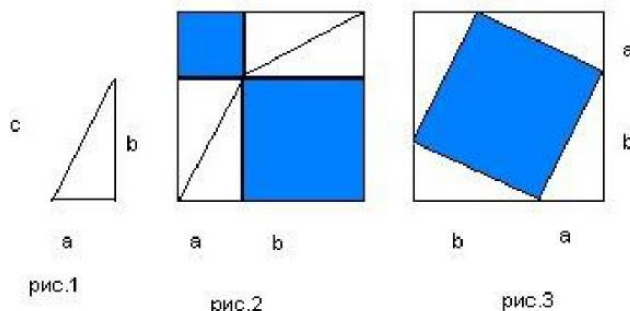
Доказательство 1. Пифагоровы штаны.

- Итак, для самого простого доказательства теоремы Пифагора для прямоугольного треугольника нужно задать “идеальные” условия: пусть $\triangle ABC$ будет не только прямоугольным, но и равнобедренным. Есть основания полагать, что именно такой треугольник первоначально рассматривали математики древности.
- Утверждаем, что квадрат, построенный на гипотенузе прямоугольного треугольника, равен сумме квадратов, построенных на его катетах.
- Проиллюстрируем доказательство следующим чертежом.
- Рассмотрим равнобедренный прямоугольный треугольник ABC .
- На гипотенузе AC можно построить квадрат, состоящий из четырех треугольников, равных исходному ABC .
- А на катетах AB и BC построено по квадрату, каждый из которых содержит по два аналогичных треугольника.
- Заметим, что тогда AB^2 — площадь квадрата, построенного на катете AB , BC^2 — площадь квадрата, построенного на катете BC , а AC^2 — площадь квадрата, построенного на гипотенузе AC .
- Далее, заметим, что каждый из квадратов, построенных на катетах AB и BC , содержит по два треугольника, равных $\triangle ABC$, а квадрат, построенный на гипотенузе AC , содержит 4 таких треугольника, равных $\triangle ABC$.
- Таким образом, имеем:
- $AB^2 + BC^2 = 2 \cdot S_{\triangle ABC} + 2 \cdot S_{\triangle ABC} = 4 \cdot S_{\triangle ABC} = AC^2$.
- Таким образом, утверждение доказано.
- (Кстати, этот чертеж лег в основу многочисленных анекдотов и карикатур, посвященных теореме Пифагора. Самый знаменитый, пожалуй, это «Пифагоровы штаны во все стороны равны».)



Доказательство 2. Древнеиндийское -1.

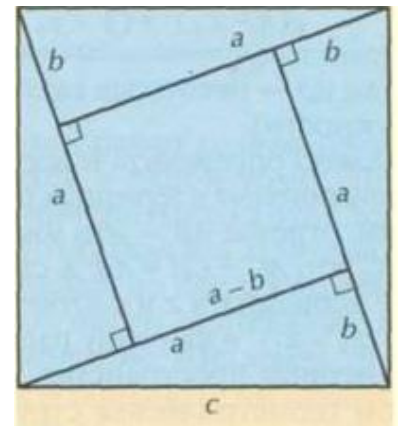
- Этот метод сочетает в себе алгебру и геометрию и может рассматриваться как вариант древнеиндийского доказательства математика Бхаскари.
- Построим прямоугольный треугольник со сторонами a , b и c (рис.1).
- Затем постройте два квадрата со сторонами, равными сумме длин двух катетов, — $(a + b)$.



- В каждом из квадратов выполним построения, как на рисунках 2 и 3, начертив данный прямоугольный треугольник по 4 раза.
- Тогда несложно доказать, что на рисунке 2 выделенные синие области – квадраты: один со стороной a , второй со стороной b ,
- А на рисунке 3 четыре построенных треугольника ограничивают квадрат со стороной, равной гипотенузе c .
- Сумма площадей построенных квадратов на рис.2 равна площади построенного нами квадрата со стороной c на рис.3.
- Это легко проверить, высчитав площади квадратов на рис. 2 по формуле: $a^2 + b^2$,
- а площадь вписанного квадрата на рисунке 3. путем вычитания площадей четырех равных между собой вписанных в квадрат прямоугольных треугольников из площади большого квадрата со стороной $(a + b)$, а именно: $(a + b)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot b$.
- Записав все это, имеем: $S = (a + b)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot b = a^2 + b^2 + 2 \cdot a \cdot b - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot b = a^2 + b^2$.
- Итак, раскрывая скобки и проводя все необходимые алгебраические вычисления, получаем, что $S = a^2 + b^2$.
- При этом площадь вписанного на рис.3. квадрата можно вычислить и по традиционной формуле $S = c^2$.
- Т.е. $a^2 + b^2 = c^2$ и теорема Пифагора доказана.

Доказательство 3. Древнеиндийское -2.

- А теперь о древнеиндийском доказательстве, описанном в XII веке в трактате «Венец знания» («Сиддханта широмани»).
- Интересно, что в качестве главного аргумента автор использует призыв, обращенный к математическим талантам и наблюдательности учеников и последователей: «Смотри!».
- Но мы разберем это доказательство более подробно.
- Внутри квадрата со стороной c построим четыре прямоугольных треугольника с катетами a и b так, как это обозначено на чертеже.
- При этом сторона большого квадрата c играет ещё и роль гипотенузы в каждом из четырёх маленьких прямоугольных треугольников.
- Несложно доказать, что внутри образуется квадрат со стороной $(a - b)$.
- Вычисляем площадь большого квадрата по формуле: $S = c^2$.
- И одновременно высчитываем ту же величину, сложив площадь внутреннего квадрата и площади всех четырех прямоугольных треугольников:
- $(a - b)^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot b$.
- Таким образом, $c^2 = (a - b)^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot b$.
- В результате несложных алгебраических преобразований получим, что $a^2 + b^2 = c^2$.
- Теорема доказана.



Доказательство 4. Древнекитайское.

- Это любопытное и изящное древнекитайское доказательство!

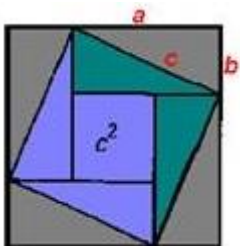


Рис.1.

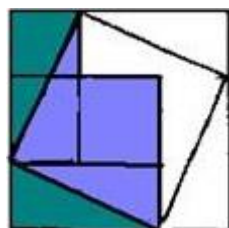


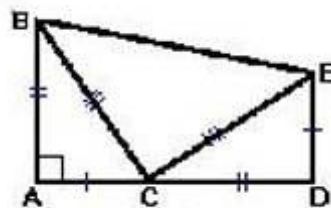
Рис. 2.

- В нем используется чертеж, который мы уже видели на рис.3 во втором доказательстве.
- А внутренний квадрат со стороной c построен так же, как в древнеиндийском доказательстве, приведенном выше.

- Если мысленно отрезать от чертежа на рис.1 два зеленых прямоугольных треугольника, перенести их к противоположным сторонам квадрата со стороной c и гипотенузами приложить к гипотенузам синевых треугольников, получится фигура под названием «стул невесты» (рис.2).
- Для наглядности можно то же самое проделать с бумажными квадратами и треугольниками. Вы убедитесь, что «стул невесты» образуют два квадрата: маленький со стороной b и большой со стороной a .
- Таким образом, сиренево – зелёный квадрат на первом рисунке, имеющий площадь c^2 , “перекроили” в “стул невесты”, имеющий площадь $a^2 + b^2$.
- Эти построения позволили древнекитайским математикам и нам вслед за ними прийти к выводу, что $a^2 + b^2 = c^2$.

Доказательство 5. От Джеймса Абрама Гарфилда.

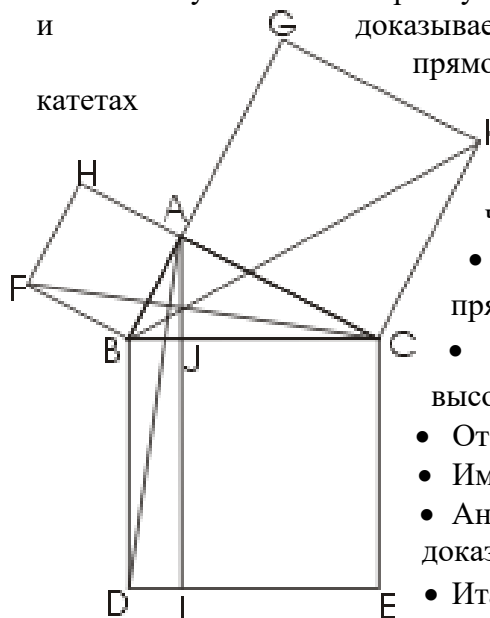
- Рассмотрим ещё один способ найти доказательство для теоремы Пифагора, опираясь на геометрию.
- Называется он «Метод Гарфилда». (Джеймс Абрам Гарфилд (1831 — 1881) — 20-й президент США, разносторонне одарённый самоучка, военачальник и активист Республиканской партии).
- Построим прямоугольный треугольник ABC .
- Нам надо доказать, что $BC^2 = AC^2 + AB^2$.
- Для этого продолжим катет AC и построим отрезок CD , который равен катету AB .
- Опустим перпендикулярный AD отрезок ED .
- Отрезки ED и AC равны.
- Соединим точки E и B , а также E и C и получим чертеж, как на рисунке выше.
- Чтобы доказать терему, мы вновь прибегаем к уже опробованному нами способу: найдем площадь получившейся фигуры двумя способами и приравняем выражения друг к другу.
- Найти площадь многоугольника $ABED$ можно, сложив площади трех треугольников, которые ее образуют.
- Причем один из них, треугольник ECB , является не только прямоугольным, но и равнобедренным.
- Не забываем также, что $AB=CD$, $AC=ED$ и $BC=CE$ – это позволит нам упростить запись и не перегружать ее.
- Итак, $S_{ABED} = 2 \cdot \frac{1}{2} (AB \cdot AC) + \frac{1}{2} BC^2$.
- При этом очевидно, что $ABED$ – это трапеция.
- Поэтому вычисляем ее площадь по формуле: $S_{ABED} = (DE + AB) \cdot \frac{1}{2} \cdot AD$.
- Для наших вычислений удобней и наглядней представить отрезок AD как сумму отрезков AC и CD .
- Запишем оба способа вычислить площадь фигуры, поставив между ними знак равенства:
- $2 \cdot \frac{1}{2} (AB \cdot AC) + \frac{1}{2} BC^2 = (DE + AB) \cdot \frac{1}{2} \cdot AD$, $AD = AC + CD$, $AB = CD$
- Используем уже известное нам и описанное выше равенство отрезков, чтобы упростить правую часть записи: $AB \cdot AC + \frac{1}{2} BC^2 = (AC + CD) \cdot \frac{1}{2} \cdot (AC + CD)$.
- А теперь раскроем скобки и преобразуем равенство:
- $AB \cdot AC + \frac{1}{2} BC^2 = \frac{1}{2} \cdot AC^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot AC \cdot CD + \frac{1}{2} \cdot CD^2$.
- $CD \cdot AC + \frac{1}{2} BC^2 = \frac{1}{2} \cdot AC^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot AC \cdot CD + \frac{1}{2} \cdot CD^2$.
- Закончив все преобразования, получим именно то, что нам и надо: $BC^2 = AC^2 + AB^2$.
- Мы доказали теорему.



Доказательство 6. Евклид и теорема Пифагора.

- Главный герой фантастической повести Евгения Велтистова «Электроник — мальчик из чемодана» знал 25 доказательств теоремы Пифагора, в том числе данное Евклидом; правда, ошибочно назвал его простейшим, хотя на самом деле в современном издании «Начал» оно занимает полторы страницы!
- Это доказательство было приведено Евклидом в его "Началах". По свидетельству Прокла (Византия), оно придумано самим Евклидом. Доказательство Евклида приведено в предложении 47 первой книги "Начал".

- На гипотенузе и катетах прямоугольного треугольника ABC строятся соответствующие квадраты и доказывается, что прямоугольник $BJLD$ равновелик квадрату $ABFH$, а прямоугольник $ICEL$ - квадрату $ACKG$. Тогда сумма квадратов на катетах будет равна квадрату на гипотенузе.



- В самом деле, треугольники ABD и BFC равны по двум сторонам и углу между ними: $FB = AB, BC = BD$. Очевидно, что углы $FBC = ABD (= B + 90^\circ)$.
- Но $S_{ABD} = \frac{1}{2} S_{BJLD}$, так как у треугольника ABD и прямоугольника $BJLD$ общее основание BD и общая высота LD .
- Аналогично $S_{FBC} = \frac{1}{2} S_{ABFH}$. (BF -общее основание, AB -общая высота).
- Отсюда, учитывая, что $S_{ABD} = S_{FBC}$,
- Имеем $S_{BJLD} = S_{ABFH}$.
- Аналогично, используя равенство треугольников BCK и ACE , доказывается, что $S_{JCEL} = S_{ACKG}$.
- Итак, $S_{ABFH} + S_{ACKG} = S_{BJLD} + S_{JCEL} = S_{BCED}$, таким образом,
- $AB^2 + AC^2 = BC^2$, что и требовалось доказать.

5. Практикум. Теорема Пифагора и её применение. Счётный марафон.

Будь благословенно божественное число, породившее людей и богов.

Полезнее наобум бросить камень, чем пустое слово.

Всё исследуй, давая разуму первое место.

Делай великое, не обещая великого.

Пифагор.

В моей работе также имеется подборка задач, каждую из которых я умею решать различными методами и с использованием теоремы Пифагора.

- В равнобедренном треугольнике с боковой стороной 5см и основанием 3см найдите высоту, проведённую к основанию.
- В равнобедренном треугольнике с боковой стороной 10см и основанием 8см найдите высоту, проведённую к боковой стороне.
- Вычислите сторону ромба, диагонали которого 12см и 18см.
- Найдите высоту равнобедренной трапеции с боковой стороной 6см и основаниями 12см и 18см.
- Найдите высоту трапеции с боковыми сторонами 6см и 10см и основаниями 12см и 18см.
- Найдите диагональ равнобедренной трапеции с боковой стороной 6см и основаниями 12см и 20см.
- Найдите площадь равнобедренного треугольника с боковой стороной 10см и основанием 12см.
- Найдите площадь равностороннего треугольника со стороной 8см.
- Найдите площадь равнобедренного прямоугольного треугольника с гипотенузой 12см.
- Найдите площадь прямоугольного треугольника с гипотенузой 5см и углом 30° .
- Найдите площадь треугольника со сторонами 6см и 8см и высотой 4см, проведённой к третьей стороне.
- Найдите площадь треугольника со сторонами 4, 5 и $\sqrt{5}$.

- 13) В трапеции $ABCD$ AD - большее основание. Прямые, проходящие через середины сторон AB, BC, DC перпендикулярно к этим сторонам, пересекаются в точке O . $\angle BCD = 150^\circ$, $AB = a, BC = b, AD = c$. Найдите площадь трапеции.
- 14) Найдите расстояние от каждой вершины прямоугольного треугольника с катетами 2 и 3 до прямой, проходящей через противоположную этой вершине сторону.
- 15) Найдите расстояние от каждой вершины треугольника со сторонами 4, 5, 6 до прямой, проходящей через противоположную этой вершине сторону.
- В каждом из двух последних случаев ответьте на вопрос: будет ли вычисленное Вами расстояние расстоянием до противоположной стороны?
- 16) В трапеции $ABCD$ BC и AD – основания. $AD = 10$ см, $BC = 5$ см, $AC = 9$ см, $BD = 12$ см. Найдите площадь трапеции.

III Вместо заключения.

Наверное, это только начало. Пусть это только начало. Но, как известно, Пифагор говорил:

“Начало — половина целого”.