111.5. НЕПРЕРЫВНОСТЬ В ГЕОМЕТРИИ

Ещё один пример связей между разными разделами школьной математики — использование свойств функций в геометрии. Я имею в виду не решение экстремальных задач и вычисление площадей и объёмов посредством интегрирования, что стало делом обычным. Я говорю об использовании в геометрии свойства непрерывности. Пример использования непрерывности для доказательства геометрических утверждений я уже приводил — это доказательство существования кругового сечения у эллипсоида. Ещё пример (В. Арнольда) – доказательство существования двух непараллельных круговых сечений непрямого кругового конуса. Сейчас об этом пойдёт более подробный разговор.

Эта идея появилась уже у древнегреческих геометров. Б.Ван дер Варден пишет об этом так: «Если непрерывно изменяющаяся величина будет сперва больше, а затем меньше некоторой заданной величины, то когда-нибудь она будет также и равна ей». И приводит пример использования «принципа непрерывности», как он его называет — замечательное решение задачи удвоения куба Архитом Тарентским,

Полное обоснование в математике этот принцип получил в одной из теорем Больцано — Коши. Согласно этой теореме непрерывная функция $f(x)$, заданная на замкнутом промежутке $[a, b]$ при условии $f(a) < \alpha$ и $f(b) > \alpha$, где α —некоторое число, в какой-то точке этого промежутка принимает значение α. При этом надо заметить, что мы имеем дело с чистой теоремой существования: на промежутке $[a,b]$ есть хотя бы одна такая точка c, что $f(c) = \alpha$, но где она - неизвестно.

В учебниках по математическому анализу обычно приводится ряд геометрических фактов, доказанных с помощью этой теоремы, как-то: площадь любой фигуры можно разделить пополам прямым разрезом, причём направление разреза любое; более того, двумя прямолинейными разрезами, перпендикулярными между собой, любую фигуру, имеющую площадь, можно разделить на четыре равновеликие части и т. д. Г. Штейнгауз приводит любопытный вариант последней задачи. Согласно ей можно разбить на четыре равновеликие части прямоугольный треугольник с катетами 3 и 4, но как найти эти разрезы - неизвестно.

Если теорема Больцано — Коши доказывалась ученикам(для доказательства требуется теория действительного числа), а в математической школе это реально, , то можно обойтись без принципа непрерывности и ссылаться прямо на эту теорему. Если же речь идет о массовой школе или об использовании этого принципа в математической же школе, но до того, как будет доказана эта теорема, то нужно найти наглядно ясную формулировку этого принципа. Можно использовать, например, такую: «Пусть есть некоторая линия и точка X движется по этой линии. Пусть некоторая геометрическая величина y зависит от положения точки X на этой линии. Пусть, далее, A и B — два положения точки X. Если при этом $y(A)<\alpha$, а $y(B)>\alpha$, то между A и B на этой линии найдётся такое положение точки X (точка C), что $y(C) = \alpha$». Геометрической величиной может быть длина, площадь, объём, угол.

При такой формулировке вся непрерывность «запрятана» в наглядно ясное понятие линии как траектории движущейся точки, в конечном счёте — в непрерывность времени, воспринимаемую чувственно.

Перейдём к примерам использования этого принципа в школьной геометрии.

1. В равностороннем треугольнике ABC проведена медиана AA_1.

а) Есть ли такая точка X на AA_1 из которой отрезок BC виден под прямым углом? (Иначе говоря, $\angle BXC = 90°$.)

б) Есть ли на AA_1 такая точка Y, из которой все стороны треугольника видны под равными углами?

Решение, а) Будем мысленно перемещать точку X по отрезку AA_1 от A к A_1. Величину угла BXC обозначим через φ (рис. 92, *а, б).*

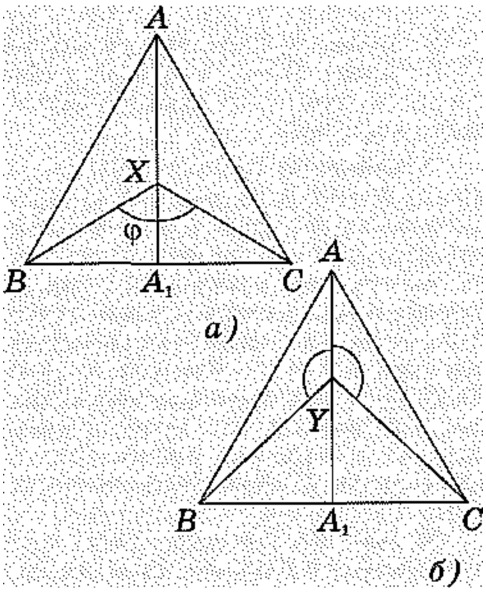

Рис. 92.

Когда точка X находится достаточно близко от A, тогда φ мало отличается от 60°, а потому φ <90°. Когда точка X находится достаточно близко от A_1 тогда φ мало отличается от 180°, а потому φ >90°. Значит, согласно принципу непрерывности, при каком-то положении точки X на AA_1 имеем φ = 90°.

б) При любом положении точки Y на AA_1 углы AYB и AYC равны (рис. 92, *б*) . Если точка Y находится в достаточной близости от A, то угол CYB близок к 60°, угол AYB близок к 150°, а потому $\angle AYB > \angle CYB$. Если точка Y находится достаточно близко от A_1, то угол CYB близок к 180°, угол AYB близок к 90°, а потому $\angle AYB < \angle CYB$. Значит, при некотором положении точки Y на AA_1 эти углы будут равны между собой.

К этим решениям сделаю два замечания. Решение задачи «б» предполагает некую модификацию принципа непрерывности, которая легко сводится к исходной формулировке, стоит только рассмотреть разность углов AYB и CYB: в первом случае она больше 0°, во втором меньше 0°, значит, когда-то будет и 0°, а тогда эти углы равны. Более «тонкое» замечание состоит в следующем. Непрерывность углов здесь используется не только для применения принципа непрерывности, но и в таких фразах: «Когда точка X достаточно близка к A, то угол BXC близок к 60°». Идея «достаточной близости» — это и есть идея непрерывности, если всё это сформулировать в точных терминах. Но я не уверен в том, что на такое использование непрерывности нужно обращать внимание школьника при обсуждении задачи, которая может предлагаться в начале курса планиметрии.

2. Доказать, что существует правильный тетраэдр.

Доказательство. Возьмём правильный треугольник и через его центр проведём перпендикуляр к его плоскости. Пусть точка X движется по этому перпендикуляру в одну сторону от плоскости треугольника. Когда она находится достаточно близко от центра треугольника, расстояния от неё до вершин меньше стороны треугольника. Если же она будет достаточно далеко от центра, то расстояния от неё до вершин будут больше стороны треугольника. Значит, при некотором положении точки на перпендикуляре расстояния от неё до вершин данного треугольника будут равны его стороне. В этом положении вместе с вершинами данного треугольника мы получим вершины правильного тетраэдра.

3. Доказать, что в правильную пирамиду можно вписать сферу.

Доказательство. Пусть точка X движется по высоте пирамиды от вершины к центру основания.

Когда X будет достаточно близко от вершины, расстояния от неё до боковых граней будут меньше, чем расстояние от неё до основания. Когда X будет достаточно близко от центра основания, расстояния от неё до боковых граней будут больше, чем расстояние от неё до основания. Значит, при некотором положении точки X на высоте расстояния от неё до боковых граней будут равны расстоянию от неё до основания. В этом положении точка является центром вписанной сферы.

4. Пусть A, B, C, D — точки в пространстве. $AB = C4 = 4$, $AC=3$, $BC = AD = 5$. Может ли быть $BD = 4$?

Решение. Будем мысленно вращать треугольник ACD вокруг AC. При таком вращении изменяется только BD, а все остальные размеры не меняются. Рассмотрим два крайних положения треугольника ACD, когда его плоскость совпадает с плоскостью ABC. В одном из таких положений точка D находится с той же стороны от AC, что и точка B. В другом из них точка D находится с другой стороны от AC, нежели точка B (рис. 93). В первом положении $BD = 3$, во втором положении $BD= \sqrt{73}$ Первое число меньше 4, а второе больше 4. Значит, при каком-то положении точки D имеем $BD = 4$.

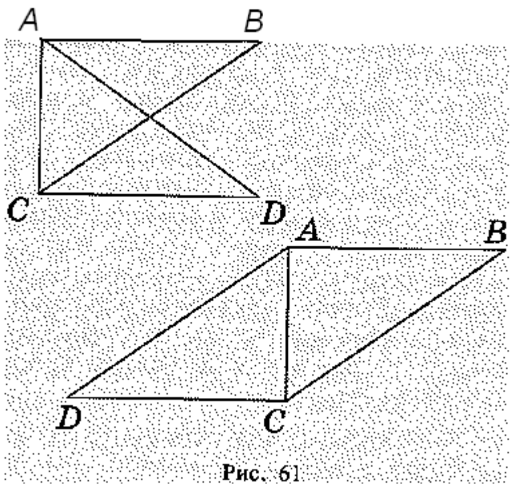

Рис.93

5. Может ли сечение правильного тетраэдра быть: а) тупоугольным треугольником; б) прямоугольным треугольником?

Решение, а) Пусть $PABC$ — правильный тетраэдр, точка K — середина ребра BC (рис. 94).

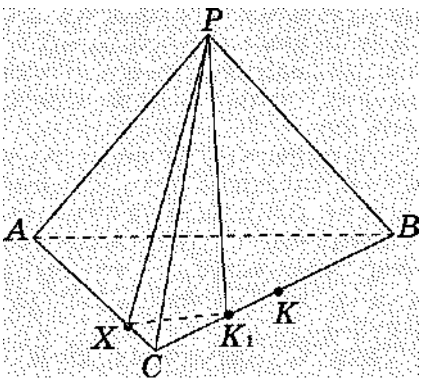

Рис. 94

Если внутри отрезка KC выбрать любую точку K_1 ,то треугольник PK_1C будет тупоугольным.

Теперь возьмём точку X на ребре AC в достаточной близости от точки C. Изменение угла PK_1X будет при этом достаточно мало, а потому он не изменит своего вида, т. е. останется тупым. Такой треугольник PK_1X и будет искомым сечением.

б) Выберем теперь точку K_1 в достаточной близости от K, чтобы угол PK_1A достаточно мало отличался от угла PKA, который является острым ($\cos \angle PKA > 0$). Но тогда вследствие малого изменения и угол PK_1A является острым. Будем теперь двигать точку X по ребру CA от C к A. Мы уже знаем, что при этом возможен тупоугольный треугольник PK_1X с тупым углом при вершине K_1. Когда точка X попадает в A, треугольник PK_1X будет при вершине K_1 иметь острый угол. Значит, «по дороге» найдётся такое положение для точки X, при котором угол PK_1X будет прямым — тогда мы и получим прямоугольный треугольник в сечении.

6. Доказать признак перпендикулярности прямой и плоскости.

Доказательство будет состоять из двух частей. Первая часть очевидна: если прямая a перпендикулярна двум пересекающимся прямым на плоскости, то она перпендикулярна прямой, проходящей через биссектрису угла, образованного этими прямыми. Вторая часть доказательства интереснее и связана с идеей непрерывности. Именно: мы хотим доказать, что данная прямая a перпендикулярна любой прямой p на этой плоскости, проходящей через точку пересечения прямой a и плоскости. К прямой p можно на плоскости с помощью биссектрис подойти сколь угодно близко. Точный смысл этой фразы таков: деля получающиеся углы пополам, мы можем получить такую биссектрису, которая образует с прямой p сколь угодно малый угол. Пусть теперь точка O — точка пересечения двух исходных прямых b и c на плоскости: точка X—любая точка на p (рис. 95).

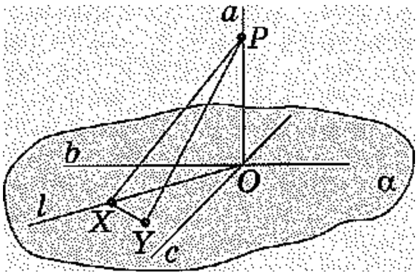

Рис. 95.

Доказать, что $a \perp p$,— это то же самое, что доказать неравенство $PO < PX$ ($P \in a$) для любой точки $X \neq O$ на прямой p . Раз мы можем подойти по биссектрисам сколь угодно близко к прямой p , то на такой биссектрисе найдется такая точка $У$, которая сколь угодно близка к точке X. Что мы из этого можем получить? $PO<PУ$, так как PO перпендикулярна любой биссектрисе, $XУ<\varepsilon$, где $\varepsilon > 0$, и $PУ<PX+\varepsilon$ из неравенства треугольника. Но тогда $PO < PX+\varepsilon$. Это неравенство возможно только в том случае, когда $PO<PX$. Последнее и означает, что $PO \perp p$.

Вот ещё пример использования принципа непрерывности в известной задаче.

7. Доказать, что в неравнобедренном треугольнике биссектриса угла лежит между медианой и высотой, проведёнными из одной вершины.

Решение. Пусть в равнобедренном треугольнике ABC $BA = BC$. В нём высота, медиана и биссектриса, проведённые из вершины B, совпадают. Начнём теперь двигать точку A по лучу CA, сколь угодно удаляя её от C. Треугольник ABC уже не будет равнобедренным. Что при этом произойдёт с точками M, L, H—концами медианы, биссектрисы и высоты (рис.96)? Точка M также уйдёт сколь угодно далеко. Точка L будет стремиться к некоторому предельному положению L_1 так как сама биссектриса BL будет стремиться к предельному положению, когда $\angle LBC \to \dfrac{180^\circ - \angle C}{2}$.

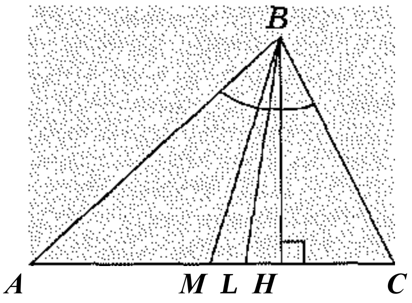

Рис. 96

Точка H останется на месте. Ясно, что на достаточно большом отрезке CA точка L будет лежать между точками M и H.

Теперь начнём движение точки A к точке C по лучу CA, В силу непрерывности порядок расположения точек M, L, H на луче CA не изменится. В самом деле, если бы точка M «обогнала» точку L при этом движении, то, значит, они бы где-то совпали. Иначе говоря, если сначала $CM>CL$, а потом $CM<CL$, то где-то $CM=CL$. Но тогда треугольник ABC становится равнобедренным, раз у него совпали медиана и биссектриса, а это противоречит условию. Из полученного противоречия вытекает, что наше предположение об «обгоне» неверно. Значит, биссектриса будет всегда лежать между медианой и высотой.

А вот пример «детского творчества» на заданную тему. В начале курса стереометрии мы решали такую задачу: «Доказать, что в пространстве существуют такие четыре точки, что все попарные расстояния между ними различны».

Маша П. дала такое решение: «Будем считать, что на плоскости это возможно. Рассмотрим такую конфигурацию на плоскости. Затем одну из точек «малым шевелением» выведем из этой плоскости и получим нужную нам конфигурацию в пространстве».

— А если число точек больше четырёх?

— Точно такое же решение.

— А как ты получишь такую конфигурацию на плоскости в общем случае?

— Аналогично. Сначала возьмём n таких точек на прямой — это легко. А затем «малым шевелением» одну из них выведем из этой прямой.

Что же мы видим из разобранных примеров? Идея непрерывности может найти применение в школьном курсе геометрии. Она корректна в математическом отношении, геометры её применяют, значит, и нам можно.

Замечу, что идея непрерывности дополняет плодотворные связи геометрии и механики (векторы, центр масс). Я вижу ещё две естественные возможности их увязывания.

Первая — построение траекторий с учётом отражения. Вот, к примеру, задача.

На рисунке 97 видим часть прямоугольника $ABGK$. $AK=3$, $AB = GK=2$, $BC = CD = DE = EF = FG = 1$. Каков кратчайший путь, лежащий в этой фигуре: а) из B в G; б) из A в F; в) из С в E; г) из A в G?

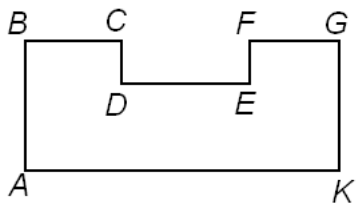

Рис. 97

Вторая носит более принципиальный характер. Можно фактически ввести в геометрию время. Ясно, что при движении по прямой или окружности оно не существенно, если мы имеем дело с отрезками или дугами (меньшими, чем окружность). Но если перейти к другим, более замысловатым траекториям, то всё становится гораздо разнообразнее. Вот две задачи:

1. Имеется равносторонний треугольник ABC со стороной 1. Точка X движется из A в B по отрезку AB, точка $У$ движется из A в B по ломаной ACB. Движение начато одновременно, скорость точки X равна 1, скорость точки $У$ равна 2. Найти зависимость расстояния между точками X и Y от времени и границы для этого расстояния.

2. Дан куб с ребром 3. Из некоторой его вершины в вершину, противоположную взятой, двинулась точка. По рёбрам куба она движется со скоростью 3, по граням —со скоростью 2. Как ей надо двигаться, чтобы пройти весь путь за наименьшее время?

Впрочем, со скоростью надо работать аккуратно. Однажды я решал в классе такую задачу: «Плоскости α и β параллельны, и расстояние между ними равно a. Отрезок AB лежит в плоскости a. По нему из A в B движется точка X со скоростью V. Точка C не лежит в этих плоскостях, и расстояние от C до α равно b. Пусть луч CX пересекает плоскость β в точке Y, Какова скорость точки Y?»

Вроде бы вполне безобидная задача, на подобие треугольников. Ясно, что отношение скоростей данных точек равно отношению $a + b$ к b (в случае, когда точка X лежит между C и Y). Но если взять точку C достаточно близко к плоскости α, то можно получить сколь угодно большую скорость точки Y.

— А как быть со скоростью света? — спросил кто-то.

И в самом деле. Ответ (самих же учеников) был такой: скорость точки — это понятие идеальное, математическое, а скорость света — понятие реальное, физическое, и нельзя их всегда отождествлять.

111.6. ДИДАКТИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ, ТЕСТЫ, ЗАДАЧИ...

При подготовке единого курса математики мне пришлось просмотреть гору разнообразных задачников. Бросается в глаза преобладание число чисто технических задач, трудных, иногда очень трудных, но всё равно технических. Другого типа задачи, требующие большего размышления, большей свободы ассоциаций, находились в сборниках олимпиадных задач. Меня не устраивали ни те, ни другие. Пришлось отбирать не только то, что меня устраивало, но и придумывать самому.

В первую очередь пришлось заняться дидактическими материалами.

Дидактические материалы по математике — сравнительное новшество. Обычно учителя обходились задачниками. Контрольные работы составляли сами, исходя из уровня класса и своего понимания. Проводились такие работы достаточно редко. Дидактические материалы появились для более оперативного контроля за усвоением, являясь в некотором смысле отголоском идей программированного обучения.

При составлении дидактических материалов мне приходилось учитывать разные тенденции, не только факт усвоения учеником того или иного раздела. Техническое совершенствование — да, интеллектуальное развитие — да, развитие способностей — конечно. Я был убеждён, что если ученика поставить в условия, когда он обязательно должен что-то придумать, то он и начнёт придумывать. Разумеется, надо учитывать разброс учеников по их способностям.

Я отказался от того, чтобы каким-то образом натаскивать учеников на те самостоятельные и контрольные работы, которые им предстоят. Скорее наоборот: по мере возможности примеры, решаемые в классе, отличались от тех, которые предлагались в дидактических материалах.

Составление этих упражнений было очень полезным — «не боги горшки обжигают» и придумывание задач — дело не бог весть какой сложности. Речь идет, конечно, о задачах дидактического характера.

Вот пример задания в начале курса алгебры и начал анализа в 10 классе математической специализации. В этих заданиях повторяются разнообразные свойства функций.

Задание. *Сложная функция*

1. $h(y) = (y^2 + 1) - 1$

Вычислите: а) $h(0)$; б) $h(h(0))$.

2. $y_1(x)=x^3$, $y_2(x) = 3x-1$, $y_3(x)=x^{-1}$

Запишите $z(x)=(3x-1)^3$ как сложную функцию, составленную из трёх данных функций.

3. $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = \sqrt{x}$.

а) Найдите $f_1(f_1(x))$.

б) Найдите $f_2(f_2(x))$.

в) Решите уравнение $f_2(f_1(x)) = f_1(f_2(x))$.

4. $f(x) = \begin{cases} 0, если\ x \geq 0 \\ 1, если\ x < 0 \end{cases}$, $g(x) = -f(x)$.

Постройте графики: а) $f(g(x))$; б) $g(g(x))$.

5. Придумайте функцию, отличную от линейной, которая при любом $x \in \boldsymbol{R}$ удовлетворяет условию $f(f(x)) = f(x)$.

Самостоятельные (контрольные) работы были составлены мной и по геометрии для 8 – 11 классов (и те и другие - для физико-математических). Они «привязаны» к учебнику по геометрии (А. Александров и др.).

Вот контрольная работа по теме «Метрические соотношения в прямоугольном треугольнике» .

1. Дан прямоугольник $ABCD$. AD =12, AB = 6. Траектория движения точки лежит в прямоугольнике. Начинается она в середине K стороны AD и представляет собой ломаную $KLMK$. Точка L лежит на стороне AB, а точка M—на границе прямоугольника. Со стороной AB траектория составляет равные углы. Пусть $\angle AKL = \alpha$.

а) Каков должен быть угол α ,чтобы $M = C$?

б) Для угла α, найденного в пункте «а», вычислите: длину траектории; расстояние от её наибольшего отрезка до центра прямоугольника; площадь, которую она ограничивает.

в) Каков должен быть угол α ,чтобы точка M оказалась внутри CD; внутри BC?

г) Может ли эта траектория представлять собой равнобедренный треугольник; равносторонний треугольник; прямоугольный треугольник?

2. В тетраэдре $ABCD$ AB = 2,CD=1, $\angle CDB = 90°$, $\angle CBD = 60°$, $\angle ACB = 130°$, $\angle CAB = 20°$. Найдите площадь его остроугольной грани.

Вот первая самостоятельная работа по геометрии в начале курса стереометрии, при этом надо учесть, что уже в курсе планиметрии ученики знакомились с неплоскими фигурами (на уровне наглядном) и решали про них несложные задачи, в основном на свойства треугольников.

Расстояние в **пространстве**

В тетраэдре $PABC$ основанием является правильный треугольник ABC со стороной 1. $PA=PC=1$. Точка K — середина PA, точка L — середина BC.

1) Пусть $PB = \sqrt{2}$. Вычислите KL.
2) Пусть $PB = x$. Выразите KL как функцию от x.
3) Может ли отрезок KL быть перпендикулярен PA и BC ?
4) Может ли KL быть длиннее каждого ребра данного тетраэдра?
5) В каких границах изменяется KL при изменении PB?

По ходу дела, занимаясь составлением дидактических материалов по геометрии, я наткнулся на несложные задачи об окружностях в пространстве. Началось всё с окружностей на сфере, а потом развивалось чуть ли не само собой. Вот небольшой фрагмент из цепочки составленных задач.

1. Две плоскости пересекаются. Окружность имеет с каждой из них общую точку. В этих общих точках проводятся касательные к данным окружностям. Докажите, что эти касательные либо параллельны, либо пересекаются на общей прямой двух плоскостей.

2. Две окружности имеют одну общую точку, и в этой точке к каждой из них проведена касательная. Существует ли связь между углом между этими касательными и углом между плоскостями, в которых лежат окружности?

3. Две окружности касаются (имеют общую касательную). Через них проходит сфера. Докажите, что их общая касательная имеет с этой сферой одну общую точку.

4. Даны три окружности, из которых никакие две не лежат в одной плоскости. Каждые две из них касаются, причем эти точки касания различны. Лежат ли эти окружности на одной сфере?

Задачи совсем другого качества появляются, когда они составлены профессиональным математиком. Я хочу привести подборку задач (сохраняя авторскую стилистику), которую когда-то предоставил мне новосибирский геометр А. Кузьминых. Почти все эти задачи, по-моему, не появлялись в печати, но заслуживают внимания. Ответы, приведённые к ним, получены моим учеником М. Коганом в бытность его студентом.

Планиметрия

1. Докажите, что квадрат можно разрезать на 1980 равных 1981 -угольников.
2. Можно ли разрезать квадрат на 1980 выпуклых 1981-угольников? (Нет.)
3. Докажите, что треугольник можно разрезать на многоугольники M_1, M_2, ..., M_{1981} , где M_n — n-угольник. Могут ли все эти многоугольники быть выпуклыми? (Нет.)

4. Докажите, что для каждого натурального $n \geq 3$ плоскость можно разрезать на равные «n – угольники», все стороны которых равны.

5. Докажите, что плоскость можно разрезать на такие многоугольники M_3, M_4, ..., что для каждого $к \geq 3$ (M_k — «k – угольник») , длины всех сторон которого равны 1.

Фигуры в пространстве

6. Существует ли фигура F в пространстве, обладающая следующим свойством: для каждой прямой p пересечение F и p является отрезком длиной 1? (Нет.)

7. Существует ли в пространстве фигура F, отличная от пустого множества, обладающая следующим свойством: для каждой прямой p, такой, что пересечение F и p непусто, это пересечение является отрезком длины 1? (Нет.)

8. Существует ли множество, содержащее 1981! точек, все расстояния между точками которого целочисленны и не превосходят 1981? (Нет.)

9. Существует ли неограниченная фигура, каждое сечение которой ограничено? (Да.)

10. Существует ли фигура, обладающая следующими свойствами:

а) пересечение её с каждым шаром непусто;

б) каждое её сечение ограничено?

Тела

11. Докажите, что существует выпуклое тело M, обладающее следующими свойствами:

а) для каждого натурального $к \geq 3$ существует сечение, являющееся «k – угольником»;

б) для каждого натурального $к \geq 3$ существует проекция, являющаяся «k-угольником».

12. Докажите, что шар нельзя разрезать конечным числом плоскостей на такие части, из которых можно было бы сложить куб (используя их все). А можно ли куб разрезать так, чтобы сложить шар? (Нет.)

13. Можно ли прямой круговой цилиндр разрезать конечным числом плоскостей на такие части, из которых можно было бы (используя их все) сложить конус вращения? А если использовать необязательно все части? (Нет.)

14. Можно ли прямой круговой цилиндр разрезать плоскостью так, чтобы из полученных частей сложить выпуклое тело, не являющееся цилиндром? А можно ли разрезать так, чтобы сложить цилиндр, не являющийся прямым? (Да, нет.)

15. Можно ли покрыть, разрешая покрывающим телам пересекаться, пространство конечным числом:

а) равных неограниченных конусов вращения;

б) неограниченных прямых круговых цилиндров (необязательно равных);

в) «телесных» параболоидов вращения (необязательно равных)? (Да, нет, нет.)

16. Можно ли покрыть пространство:

а) тремя неограниченными конусами вращения;

б) четырьмя? (Нет, да.)

17. Выпуклое тело разрезано плоскостью на два тела, из которых каждое имеет ось вращения. Имеет ли исходное тело ось вращения? (Да.)

18. Аналогичный вопрос относительно плоскости симметрии. (Нет.)

19. Аналогичный вопрос относительно центральной симметрии. (Да.)

20. Выпуклое тело, имеющее ось вращения, разрезано плоскостью на два тела, одно из которых имеет ось вращения. Будет ли второе тело иметь ось вращения? (Нет.)

21. Аналогичный вопрос относительно плоскости симметрии. (Да.)

22. Аналогичный вопрос относительно центральной симметрии. (Да)

23. Докажите, что существуют выпуклые тела M_1 и M_2, обладающие следующими свойствами:

а) для каждой плоскости P проекции M_1 и M_2 на P равны;

б) для каждой плоскости P проекции M_1 и M_2 на P не равны.

24. Докажите, что существуют выпуклые тела M_1 и M_2, обладающие следующими свойствами:

а) для каждой плоскости P_1 существует плоскость P_2, такая, что проекция M_1 на P_1 равна проекции M_2 на P_2;

б) для каждой плоскости P_2 существует плоскость P_1, такая, что проекция M_2 на P_2 равна проекции M_1 на P_1;

в) объёмы тел M_1 и M_2 не равны.

25. Пусть тело M обладает следующим свойством: для каждой плоскости P пересечение M хотя бы с одним открытым полупространством, определяемым P, выпукло. Выпукло ли тело M? А если M— фигура
(а не обязательно тело)? (Да.)

26. Существует ли тело, каждое сечение которого невыпукло и каждая проекция которого тоже невыпукла?

27. Существует ли тело, у которого только одно сечение выпукло и только одна проекция выпукла?

28. Существует ли неограниченное тело, каждое сечение которого ограничено? (Да.)

29. Докажите, что существует тело, каждая проекция которого — круг радиуса 1, а каждое сечение невыпукло.

30. Существует ли выпуклое тело M, обладающее следующим свойством: для каждой прямой p, пересекающей внутренность M, пересечение M и p — отрезок, длина которого целочисленна? (Нет.)

31. Существует ли выпуклое тело M, такое, что для каждой прямой p, пересекающей внутренность M, пересечение M и p — луч? (Нет.)

32. Доказать, что существует бесконечное множество ограниченных тел, внутренности любых двух из которых не пересекаются, а расстояние между любыми двумя телами равно 0.

33. Доказать, что существует бесконечное множество тел в пространстве, таких, что расстояние между любыми двумя из них равно 1.Может ли хотя бы одно из этих тел быть ограниченным?

34. Привести пример тела, обладающего следующим свойством: на его границе существуют точки, не соединимые ломаной, содержащейся в теле, ни с какой внутренней точкой этого тела.

35. Доказать, что пространство можно разбить на такие равные тела, что каждая проекция каждого из этих тел есть вся плоскость.

36. Можно ли расположить в пространстве бесконечное множество равных неограниченных телесных прямых круговых конусов, никакие два из которых не пересекаются? (Да.)

37. Можно ли расположить в пространстве бесконечное множество равных телесных параболоидов вращения, никакие два из которых не пересекаются? (Да.)

38. Можно ли расположить в пространстве бесконечное множество попарно непересекающихся двойных телесных конусов вращения? (Да.)

39. В пространстве расположены 1981 попарно непересекающиеся неограниченные телесные конусы вращения. Можно ли каждый из них переместить так, что конусы, полученные в результате этих перемещений, покрывают все пространство? А если конусов бесконечное множество? (Нет.)

Многогранники

40. Существует ли выпуклый многогранник, каждое сечение которого — треугольник? (Нет.)

41. Существует ли выпуклый многогранник, каждая проекция которого — треугольник? (Нет.)

42. Доказать, что для каждого натурального $n \geq 4$ существует выпуклый многогранник M_n, обладающий следующими свойствами:

а) каждое сечение M_n плоскостью — многоугольник, имеющий не более n сторон;

б) для каждого натурального $k (4 \leq k \leq n)$ существует сечение M_n, являющееся «k-угольником»;

в) каждая проекция M_n — многоугольник, имеющий не более n сторон;

г) для каждого натурального k $(3 \leq k \leq n)$ существует проекция M_n ,являющаяся «k – угольником»;

д) многогранник имеет ровно n вершин и n граней. (Пирамида.)

43. Можно ли так разрезать прямоугольный параллелепипед $1 \cdot 1 \cdot 1000$ на 50 частей

(необязательно равных), чтобы из них можно было сложить куб? (Для младших школьников прямоугольник $1{\cdot}100$ на 5 частей.) (Нет.)

44. Можно ли куб разрезать плоскостью, не параллельной ни одному его ребру, так, чтобы из полученных частей сложить выпуклый многогранник, не являющийся кубом? (Да.)

45. Существует ли многогранник, каждое сечение которого центрально-симметрично? (Нет.)

46. Доказать, что все проекции выпуклого многогранника центрально-симметричны тогда и только тогда, когда многогранник центрально-симметричен.

47. Существуют ли такие два тетраэдра T_1 и T_2, что $T_1 \subset T_2$, а сумма длин рёбер T_1 больше суммы длин рёбер T_2? (Да.)

48. Существуют ли такие две пирамиды T_1 и T_2, что $T_1 \subset T_2$, но $S_1/S_2>1981$) где S_1 , S_2 — площади поверхностей соответствующих пирамид? (Да.)

49. Тетраэдры T_1 и T_2 таковы, что, что $T_1 \subset T_2$. Доказать, что $L_1 / L_2<2$, где L_1 , L_2— суммы длин рёбер соответствующих тетраэдров,

50. Доказать, что для каждого многогранника существует прямая, пересекающая его по отрезку. А всегда ли существует такая плоскость?

51. Существует ли многогранник M, такой, что для каждой плоскости P M I P либо пусто, либо одноточечно, либо невыпукло.

52. Доказать, что существует невыпуклый многогранник, обладающий следующими свойствами:

1) все его грани —равные правильные многоугольники;

2) все его двугранные углы равны. Доказать, что существует такой многогранник, имеющий более 1981 грани.

А вот ещё один пример находок - в элементарной геометрии - профессионального математика. Для Ю. Кузьмина, доцента Петербургского технического университета, составление и решение задач из геометрии треугольника— хобби. И вот в такой перепаханной за несколько столетий теме он находит неожиданные и красивые результаты.

Очень часто, увидев внезапную по содержанию задачу, ловишь себя на мысли: ладно, предположим, решу, но как до неё можно было додуматься? Обычно это остается загадкой.

Творчество Ю. Кузьмина особенно интересно тем, что он нашёл некие общие закономерности в конфигурациях из треугольников и окружностей, доселе неизвестные. Знание этих закономерностей позволяет как решать, так и составлять новые, оригинальные задачи. Приведу здесь подборку его задач, предложенную им самим.

Задача 1. В треугольнике $A_1A_2A_3$ A_1L_1—биссектриса угла A_1 , C_2 и C_3 — проекции вершин A_2 и A_3 на биссектрису внешнего угла при вершине A_1. Доказать, что точка пересечения прямых A_2C_3 и A_3C_2 есть середина биссектрисы A_1L_1.

Задача 2. В треугольнике $A_1A_2A_3$ точки S_2 и S_3 есть проекции вершин A_2 и A_3 на биссектрису A_1L_1. Доказать, что прямые A_2S_3 и A_3S_2 пересекаются на биссектрисе внешнего угла при вершине A_1.

Задача 3. Хорды K_1K_2 и K_1K_3 соединяют точки касания вписанного в треугольник $A_1A_2A_3$ круга. Доказать, что любой отрезок, заключенный между этими хордами и параллельный основанию A_2A_3 треугольника, делится прямой A_1K_1 пополам.

Задача 4 *(признак параллельности прямых).* На прямой a выберем произвольную точку и проведём под любым углом луч с вершиной в этой точке. От вершины луча отложим на нём последовательно шесть произвольных, но равных отрезков, обозначив их концы цифрами 1, 2, 3, 4, 5 и 6. Выберем на прямой a другую точку и проведем через неё и точки 2, 3 и 6 три прямые. Доказать, что если на другой прямой b эти три прямые отсекут равные между собой отрезки, то прямая b параллельна прямой a.

Задача 5. На сторонах угла с вершиной в точке O взято по две точки Y, B и Z, C так, что прямые BZ и CY пересекаются внутри угла в точке X, а прямые BC и YZ — вне угла в точке A. Найти геометрическое место точек X, если прямая YZ осуществляет поворот вокруг точки A.

Задача 6. Точка P_1 диаметрально противоположна точке касания K_1 вписанного в треугольник

$A_1A_2A_3$ круга. K_1 лежит на стороне A_2A_3, M_1 — середина этой стороны, O — центр вписанного круга. Доказать, что OM_1 параллельна A_1P_1.

Задача 7. O_1 и O_2 — центры двух непересекающихся кругов, O — точка пересечения их внутренних касательных. A_1 и A_2 —точки касания кругов с внешней касательной. Доказать:

1) Медиана треугольника A_1O_1O, проведённая из вершины O_1, параллельна прямой OA_2,

2) Отрезок OP перпендикулярен общей внешней касательной A_1A_2 где P — точка пересечения прямых O_1A_2 и O_2A_1.

Задача 8. Из центров O_1 и O_2 двух непересекающихся кругов проведены перпендикуляры к линии центров до пересечения в точках B_1 и B_2 с общей внешней касательной. Пусть O — точка пересечения внутренних касательных. Доказать, что прямые OB_1 и OB_2 отсекают на кругах подобные сегменты.

Задача 9. Рассмотрим в треугольнике $A_1A_2A_3$ четыре биссектрисы внутренних и внешних углов, не проходящих через вершину A_1. Показать, что точки этих биссектрис, ближайшие к вершине A_1, лежат на одной прямой — средней линии треугольника.

Задача 10. Показать, что из девяти точек пересечения трёх средних линий треугольника и трёх его биссектрис шесть лежат на окружностях, построенных на сторонах треугольника как на диаметрах.

Задача 11. Три прямые a_1, a_2 и a_3 пересекаются в точках A_1, A_2, A_3, образуя треугольник. Два вневписанных круга этого треугольника касаются прямых в точках M_1, M_2, M_3 и N_1, N_2, N_3 соответственно. Показать, что две пары прямых M_1M_2, N_1N_3 и N_1N_2, M_1M_3 пересекаются: одна — на высоте треугольника, другая — на её продолжении. При этом они отсекают на высоте два отрезка, равных (если считать от вершины A_1) соответственно радиусу вписанного в треугольник круга и радиусу третьего вневписанного круга.

Задача 12. Доказать, что в остроугольном треугольнике среднее геометрическое шести отрезков, на которые стороны делятся основаниями высот, равно среднему геометрическому трех расстояний между этими основаниями.

Задача 13. В трапеции $ABCD$ точка K — середина боковой стороны AB — соединена отрезком с вершиной C. Отрезок PQ ($P \in AB$, $Q \in CD$) проходит через точку пересечения диагоналей трапеции. Отрезки KC и PQ пересекаются в точке T. Докажите, что $BCQT$ — параллелограмм.

В последние годы у нас появилась ещё одна форма контроля — тесты. На Западе, особенно в США, они используются достаточно давно.

В чём главное достоинство проверки по тестам? В скорости. В чём главное достоинство проверки посредством дидактических материалов? В её основательности. Отсюда ясно, что эти две системы проверки могут прекрасно дополнять друг друга.

Я попытался разобраться в особенностях тестовой проверки — это достаточно серьёзное дело, сам составлял тесты и нашёл немало интересного - для всех желающих работы по составлению тестов непочатый край.

Одна из поставленных мной целей при сочинении тестов – попытка отразить в них ценности математического образования. Никакой не секрет, что между обозначенными в программных документах ценностями математического образования и тем, что мы проверяем у наших учеников – «дистанция огромного размера». Что мы проверяем в контрольных работах и на экзаменах? По сути - только одно: умеют ли наши ученики решать задачи определённого типа, да ещё в достаточно краткое время. И в подавляющем большинстве случаев эти задачи требуют либо знания алгоритмов, либо алгоритмических предписаний. С другой стороны – не можем же мы даже хотеть, чтобы все наши воспитанники во время жёстких временных условий проверочных работ демонстрировали нечто творческое. И что тут делать?

Мне представляется, что выход из этого тупика возможен. В конечном счёте тесты диагностируют те или иные свойства интеллекта ученика. Поэтому имеет смысл сразу зафиксировать, о каких свойствах идет речь. Я остановился на таком интегральном свойстве (латентной переменной): готовность (интеллектуальная) к продолжению математического образования.

Готовность предполагает, что от ученика нужно нечто иное, нежели сумма знаний и умений. Точнее, даже если он чего-то не знает или не умеет - не так важно. В конце концов при необходимости он найдёт нужную формулу или научится решать какой-то тип задач. Важнее другое - а что он может делать с тем, что знает и умеет. Владеет ли он этим в разных ситуациях? Понимает ли во всём существенном?

Я выделяю довольно бесспорные составляющие этой интеллектуальной готовности: 1) подтверждение или опровержение имеющегося высказывания (при этом возможная аргументация – наглядная картина, возникающая в результате работы пространственного мышления); 2) анализ условия задачи на определённость (возможность получить однозначный ответ) и корректность (непротиворечивость условия); 3) установление наличия или отсутствия связей между утверждениями; 4) анализ логической структуры высказывания; 5) владение понятиями в общей форме; 6) перевод аналитической зависимости в наглядную форму и обратно; 7) рефлексия, то есть отделение знания от незнания; 8) определённый уровень общей логической культуры.

Тесты готовности можно разделить на две большие группы: тесты про объекты (число, функция, выражение, уравнение, неравенство, фигура) и тесты про величины (длина, угол, площадь, объём). Тесты можно дифференцировать, исходя из того, что нас интересует про объекты и про величины, учитывая отдельные виды математической деятельности.

К ним я отношу: опознание объекта; выяснение существования (не существования) объекта; установление единственности объекта (или её отсутствия); выведение свойств объекта из его определения (или невозможность такового); выведение свойств объекта из других его свойств (или невозможность такового); выведение свойств объекта в результате только логического рассуждения ; идентификация отношения между элементами множества (равенство, неравенство, принадлежность, прочее); выведение свойств объекта, полученного преобразованием из другого объекта (или нарушение его свойств); работа с численными значениями и величинами (нахождение, оценка , сравнение) - разумеется, список не полон.

Разумеется, среди тестов должны содержаться и такие, которые проверяют фактическое знание учениками теорем и определений.

По содержанию тесты разбиты на три больших раздела: «Числа», «Функции», «Фигуры». В каждом разделе проведено деление по конкретной тематике. Например, в разделе «Функции» есть подразделы «Линейная функция», «Квадратичная функция» и т. д. И в каждом подразделе проведена дальнейшая специализация тестов (не по сложности).

Порядок, в котором составлена вся совокупность тестов, не "привязан" жёстко к какому - либо учебнику, он больше увязан с содержанием курса. Поэтому, например, задания, относящиеся к решению уравнений (в тестах по алгебре) или к треугольникам (в планиметрии), можно увидеть и в начале всей совокупности, и в других её местах.

Приведу примеры составленных мною тестов (по алгебре, началам анализа, геометрии). Задания, подобранные для тестов, появились не «из воздуха», их содержание отражает громадный опыт преподавания математики в советской и российской школе. Но окончательные формулировки – авторские, они обусловлены спецификой тестовой формы.

Тесты по алгебре и началам анализа

В предлагаемых тестах два раздела (числа и функции), и каждый из них делится на два подраздела. Каждый подраздел разбивается по одним и тем же темам, а темы таковы: 1. Целые выражения. 2. Дробно - рациональные выражения.3. Иррациональные (степенные) выражения. 4.

Показательные и логарифмические выражения. 5. Тригонометрические выражения. 6. Комбинирование выражений. Такое разбиение не является классификацией – один и тот же тест мог бы быть помещён в разные разделы.

1) *Требуется установить связь между утверждениями.*

О числе a имеется пять утверждений:

A) $a + |a| = 0$.
B) $a - |a| = 0$.
C) $a + |a| = 2a$.
D) $a\,|a| = a^2$.
E) $a\,|a| = -1$.

Тогда верны такие следования:

1. Если E), то A).
2. Если B), то C).
3. Если C), то D).
4. Если A), то E).
5. Если A) и C), то B).

2) *Надо разобраться в логической структуре утверждения*

1. Для всякого числа a можно найти такое число b, что выполняется неравенство: $a < b^2 < a + 1$.
2. Есть такое число a, что при любом b выполняется неравенство: $a \le b \le a^2$.
3. Есть такое число a, что при любом b выполняется неравенство: $a < b < a + \ b$.
4. При любых a и b выполняется неравенство: $(a - b)^2 \le (a + b)^2$.
5. Нет таких чисел a и b, что выполняется неравенство: $1/a < b < a < 1/b$.

3) *Работа с понятиями в общей форме*

Функция f монотонна на $\boldsymbol{R}$. Тогда будет монотонной функция g, если:

1. $g(x) = f(-x)$;
2. $g(x) = f(2x)$;
3. $g(x) = f(|x|)$;
4. $g(x) = f(1/x)$;
5. $g(x) = f(x^2)$.

4) *Общая логическая культура*

Нет такого числа, которое:

1. является наибольшим из всех отрицательных чисел;
2. является наименьшим из всех неотрицательных чисел.;
3. является наибольшим из всех чисел заданного открытого промежутка.;
4. является наименьшим из всех чисел некоторого данного промежутка;
5. меньше противоположного ему числа.

(Здесь требуется умение опровергнуть возникающие предположения и работа с отрицанием)

5) *Аналитические выкладки могут быть заменены графической иллюстрацией*

Эта система имеет положительное решение (пару положительных значений переменных *x* и *y*).

1. $\begin{cases} x+y=-3, \\ x-y=1. \end{cases}$
2. $\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ x^2-y^2=-1. \end{cases}$
3. $\begin{cases} x+y=1, \\ x^2+y^2=1. \end{cases}$
4. $\begin{cases} xy=1, \\ x+y=2. \end{cases}$
5. $\begin{cases} xy=1, \\ x^2+y^2=1. \end{cases}$

6) *Допускается наглядная аргументация*

Система

$\begin{cases} x-y=1, \\ x^4+y^4=a^2 \end{cases}$ имеет одно решение при таких значениях *a*:

1. 2;
2. 1;
3. 0,5;
4. 0;
5. $-\sqrt{2}$ /2.

7) *Условие одного из заданий противоречиво*

Число *A* является иррациональным.

2. $A = (\sqrt{-2})^2$.

8) *Неопределённое задание*

Некоторое число a удовлетворяет условию $a > 2$. Число A является положительным, если:
если:
1. $A = 2a - 3$.
2. $A = 1/(1 - a)$.
3. $A = (a - 5)^2/(a - 1)$
4. $A = (a - 2)/(a - 3)$.
5. $A = 1/(a^2 - 3a + 1)$.

9) *Выяснение существования*

Функция $y(x)$ задана формулой $y = x^2 + ax$. Найдётся функция такого вида, что:

1. точка (0, 1) лежит на её графике;
2. она положительна на $(0, \infty)$;
3. она монотонна на $(-\infty, 1)$;
4. она имеет минимум при $x = 0$;
5. один её корень на 1 больше другого.

10) *Установление единственности объекта*

.

Это уравнение имеет одно решение.

1. $2^x = -3x$.
2. $10^{x+7} = 20^{5-x}$.
3. $4^x + 2^x = 1$.
4. $3^{x^2+x+1} = 1$.
5. $x^x = -1$.

11) *Получение свойств объекта, исходя из его определения*

Функция f определена на $\boldsymbol{R}$, отлична от постоянной и является чётной. Тогда является чётной функция g , если:

1. $g(x) = f(2x)$;
2. $g(x) = f(x + 1)$;
3. $g(x) = f(1/x)$;
4. $g(x) = f(f(x))$;
5. $g(x) = f^{-1}(x)$ (то есть $g(x)$ — обратная к $f(x)$).

12) *Выведение свойства объекта, исходя из других его свойств*

Пусть функция f непрерывна на $\boldsymbol{R}$. Тогда:

1. для любой функции f существует такая ее первообразная, которая проходит через точку (1, 1);
2. существует такая функция f, которая меньше любой своей первообразной;
3. существует единственная функция f, которая равна хотя бы одной своей первообразной;

4. существует такая чётная функция f, которая имеет чётную первообразную;
5. нет такой непериодической функции f, для которой существует периодическая первообразная

13) *Получение свойства объекта логическим путём*

При любом отрицательном x число A отрицательно, если:

1. $A = 5 + x$;
2. $A = –5 + x$;
3. $A = –5 – x$.
4. $A = 25 – x^2$;
5. $A = 5x + x^2$.

(Здесь возможно использование контрпримеров.)

14) *Равенство*

Это равенство верно для всех значений x из области определения.

1. $\sqrt{x} + \sqrt{-x} = 0$.
2. $\sqrt{-x^2}\sqrt{-x} = \sqrt{x^3}$.
3. $\sqrt{x^2} \div \sqrt{-x} = \sqrt{-x}$.
4. $(\sqrt{x} - \sqrt{-x})^2 = x$.
5. $\dfrac{(\sqrt{x} + \sqrt{-x})(\sqrt{x} - \sqrt{-x})}{x} = 2$.

15) *Равносильность уравнений*
Эти уравнения равносильны.

1. $\sqrt{-x} = x$ и $x = –1$.
2. $x\sqrt{-x} = 1$ и $x^3 = –1$.
3. $x + \sqrt{x^2} = 0$ и $x = 0$.
4. $x^{1,5} = 1$ и $x\sqrt{x} = 1$.
5. $x^{4/3} = –1$ и $x\sqrt[3]{x} = -1$.

16) *Сравнение числовых значений*

$A > B$, если:

1. $A = \sin 44°$, $B = \cos 44°$;
2. $A = \text{tg } 1$, $B = \text{ctg } 1$;
3. $A = \sin (\pi/7)$, $B = \text{tg } (\pi/7)$;
4. $A = \sin (\arcsin 1)$;

$B = \cos(\arccos 1)$;

5. $A = \sin \sqrt{\pi}$, $B = \cos \sqrt{\pi}$.

17) *Установление взаимной простоты натуральных чисел*

Числа a и b взаимно простые. В этом случае являются взаимно простыми числа A и B.

1. $A = 2a$, $B = b$.
2. $A = a$, $B = a + b$.
3. $A = a + 1$, $B = b + 1$.
4. $A = a - b$, $B = a + b$.
5. $A = 2a + b$, $B = 2b + a$.

18) *Делимость натуральных чисел*

Число A является делителем числа B при любом натуральном n.

1. $A = 10$, $B = 41^n - 1$.
2. $A = 3$, $B = 10^n - 4$.
3. $A = 5$, $B = 81^n + 14$.
4. $A = 9$, $B = 10^{(n+1)} - 10(n + 1) + n$.
5. $A = 7$, $B = 9^n + 16^n$.

19) *Нахождение численного значения*

$A = 0$ при любом значении x.

1. $A = x - |x|$.
2. $A = |x|^2 - |x^2|$.
3. $A = |x + 1| - |x| - 1$.
4. $A = |x^3| - |x|^3$.
5. $A = |x^2 + 1| - x^2 - 1$.

20) *Оценка численного значения*

Эта функция имеет максимум и минимум.

1. $y = |x^2 - 7x + 10|$.
2. $y = x^3 - 12x$.
3. $y = \sqrt{x^2} + \sqrt{x^3}$.
4. $y = 2^{x^2 - x}$.
5. $y = \sin(\arcsin x)$.

21) *Сравнение численных значений*

$A > B$, если:

1. $A = 2^{1/3}$, $B = 3^{1/3}$;
2. $A = (1/2)^{1/3}$, $B = (1/3)^{1/3}$;
3. $A = 2^{-5}$, $B = (1/3)^{-5}$;

4. $A = (1/2)^{-10}$, $B = 5^{-10}$;
5. $A = (-2)^{1,1}$, $B = (-2\ )^{2,1}$.

22) *Получение свойств объекта, полученного в результате его преобразования*

Функция f непрерывна на $\boldsymbol{R}$ и возрастает при $x < 0$. Тогда при $x < 0$ будет монотонной функция g, если:

1. $g(x) = -f(x)$;
2. $g(x) = f(-x)$;
3. $g(x) = 1/f(x)$;
4. $g(x) = f(x - 1)$;
5. $g(x) = f(f(x))$.

Тесты по геометрии

1) *Требуется установить связь между утверждениями*

Даны такие утверждения о четырёхугольнике.
А) У него есть центр симметрии.
Б) У него есть ось симметрии.
В) У него есть пара параллельных сторон.
Г) Его диагонали равны.
Д) Его диагонали перпендикулярны.
Тогда:
1. если А) и Д), то Г);
2. если Б) и Г), то В);
3. если В) и Г), то А);
4. если А) и Б), то Д);
5. если А), Г) и Д), то Б).

2) *Работа с понятиями в общей форме*
Соответствие является преобразованием фигуры M в фигуру N, если:
1. каждая точка фигуры M является образом хотя бы одной точки фигуры N.
2. каждой точке фигуры M соответствует хотя бы одна точка фигуры N.
3. M и N - вся плоскость и точке (x, y) соответствует точка $(2x, y/2)$.
4. M и N - вся координатная плоскость без начала координат и точке с координатами (x, y) соответствует точка с координатами $(1/x, 1/y)$.
5. M - полуокружность с центром O. К ней в ее середине проведена касательная - прямая p. Прямая p - это фигура N. Из точки O проводится луч, пересекающий прямую p . $Y = f(X)$, где X - точка на полуокружности, а Y - точка на прямой p.

3) *Общая логическая культура*
1. Векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AX}$ сонаправлены тогда и только тогда, когда $\overrightarrow{AX} = \alpha\overrightarrow{AB}$, где $\alpha > 0$.
2. Точка X лежит на прямой AB тогда и только тогда, когда $\overrightarrow{AX} = \alpha\overrightarrow{AB}$, где $\alpha > 0$.

3. Точка X принадлежит отрезку AB тогда и только тогда, когда $\overrightarrow{AX} = \alpha \overrightarrow{AB}$, где $0 \le \alpha \le 1$.

1. $ABCD$ – параллелограмм. Точка X принадлежит параллелограмму $ABCD$ тогда и только тогда, когда $\overrightarrow{AX} = \alpha \overrightarrow{AB} + \beta \overrightarrow{BC}$, где $0 \le \alpha \le 1$ и $0 \le \beta \le 1$.

5. Точка X лежит внутри угла AOB тогда и только тогда, когда $\overrightarrow{OX} = \alpha \overrightarrow{OA} + \beta \overrightarrow{OB}$, где $\alpha > 0$ и $\beta > 0$.

4) *Аналитика сводится к наглядности*

f(M) = N, если:

1. $M = \{(x,y): x^2 - y = 0\}$, $N = \{(x,y): y^2 - x = 0\}$, f - поворот.
2. $M = \{(x,y): x^2 + y = 0\}$, $N = \{(x,y): y^2 + x = 0\}$, f - осевая симметрия.
3. $M = \{(x,y): y - e^x = 0\}$, $N = \{(x,y): y + e^{-x} = 0\}$, f - центральная симметрия.
4. $M = \{(x,y): y - \sin x = 0\}$, $N = \{(x,y): y - \cos x = 0\}$, f - перенос.
5. $M = \{(x,y): y = x^2 + 2x + 2\}$, $N = \{(x,y): y = -x^2 + 2x - 1\}$, f - скользящее отражение.

5) *Допускается наглядная аргументация*

В каждом круге:

1. есть самая маленькая хорда;
2. нет наибольшей хорды;
3. любые две хорды делят его не меньше, чем на три части ;
4. существует сектор, который является сегментом;
5. можно провести 100 концентрических окружностей так, чтобы все полученные кольца были одинаковой ширины.

6) *Условие одного из заданий противоречиво*

Площадь треугольника больше 1, если

одна из его сторон равна 100, другая равна 200, а третья равна 300;

7) ***Неопределённое задание***

Некоторый треугольник является равнобедренным, если:

1. две его высоты равны;
2. биссектриса одного из углов делит его на две равновеликие части;
3. равны все его средние линии;
4. две его высоты, пересекаясь, делятся пополам;
5. его вершины находятся в вершинах равнобокой трапеции.

8) *Выяснение существования*

1.Существуют два таких треугольника, что их пересечение и их объединение – треугольники.

2. Существуют два таких квадрата, что их пересечение и их объединение – квадраты.

3. Есть два таких прямоугольника, что их пересечением является квадрат, а объединением – прямоугольник.

4. Если пересечение двух кругов не является кругом, то и их объединение не является кругом.

5.Нет таких двух треугольников, которые в пересечении дают отрезок, а в объединении – треугольник.

9) *Получение свойств из определения*

В каждом правильном n – угольнике ($n > 4$):

1. есть тупой угол при вершине;
2. есть равные диагонали;
3. есть ось симметрии, не проходящая через его диагональ;
4. диаметром является его диагональ;
5. вершины, взятые через одну, являются вершинами другого правильного многоугольника.

10) *Выведение свойства из других свойств*

Параллелограмм является ромбом, если:

1. у него есть ось симметрии;
2. биссектрисы трёх его углов имеют общую точку;
3. все его высоты равны;
4. его площадь равна половине произведения диагоналей;
5. в него можно вписать окружность.

11) *Равенство*

Эти фигуры равны;

1. два сегмента одного и того же круга, меньшие полукруга, у которых равны хорды, отсекающие эти сегменты от круга;
2. два равных равносторонних треугольника ABC и $A_1B_1C_1$ вместе с двумя равными окружностями; радиусами в половину стороны треугольника, в одном из них. эта окружность имеет центр в вершине A, а в другом из них она имеет центр в вершине B_1;
3. два равных квадрата $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ вместе с двумя равными окружностями; радиусами в половину стороны квадрата, в одном из них. эта окружность имеет центр в середине стороны AB, а в другом из них она имеет центр в вершине B_1C_1;
4. две равнобоких трапеции, у которых соответственно равны основания и бока, при этом большее основание каждой трапеции лежит на одной прямой с меньшим основанием другой трапеции, а сами трапеции не имеют общих точек;
5. части двух равных кубов $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и $KLMNK_1L_1M_1N_1$, при этом часть первого куба получена после проведения сечения AB_1C_1D , а часть второго куба получена после проведения сечения K_1L_1MN.

12) *Параллельность*

Две прямые параллельны. Тогда:

1. если одна из них пересекает третью прямую, то и другая тоже:
2. если одна из них образует с третьей прямой заданный угол, то и другая тоже;
3. если одна из них удалена от данной точки на заданное расстояние, то и другая также удалена от этой точки на это же расстояние:
4. если одна из них делит заданный четырёхугольник на три части, то и другая, пересекающая этот четырёхугольник, делит его на три части:
5. если одна из них параллельна данной плоскости, то и другая тоже.

13) *Перпендикулярность*

Могут быть взаимно перпендикулярны:

1. диагонали прямоугольника;
2. высоты треугольника;
3. диагональ равнобокой трапеции и её диагональ;
4. две прямые на плоскости, симметричные относительно оси;
5. прямая, проходящая через ребро куба, и прямая, проходящая через диагональ его грани.

14) *Симметрия*

Существует осевая симметрия такая, что образом фигуры *M* является фигура *N*, если:

1. *M* - это фигура на координатной плоскости, которая задается условием $xy \geq 0$, а *N* - это фигура на координатной плоскости, которая задается условием $xy \leq 0$.
2. *M* - вся плоскость и точке с координатами (x,y) соответствует точка с координатами (x, - y -1).
3. *M* - это объединение двух кругов, *N* - та же фигура, что и *M*.
4. *N* - это образ фигуры *M* в результате композиции двух осевых симметрий относительно различных прямых.
5. *M* - это некоторая ломаная из двух взаимно перпендикулярных звеньев, каждое из которых имеет длину 1, *N* - это другая такая же ломаная, имеющая с первой ломаной общее начало; звенья второй ломаной соответственно перпендикулярны звеньям первой ломаной.

15) *Подобие*

Два треугольника подобны, если:

1. оба они прямоугольные. Катеты одного из них 1 и $\sqrt{3}$, один из углов другого равен 30^0.
2. один треугольник имеет углы 10^0 и 150^0, другой треугольник имеет углы 10^0 и 20^0.
3. две стороны и медиана к третьей стороне одного треугольника пропорциональны соответствующим двум сторонам и медиане другого треугольника.
4. один из них - прямоугольный и вписан в окружность радиусом 1.; другой из них вписан в окружность радиуса 2 и имеет площадь в 4 раза большую, чем первый треугольник.
5. для каждого угла первого треугольника есть равный ему угол во втором треугольнике и наоборот.

16) *Нахождение численного значения величины*

Площадь круга больше 10, если:

1. радиус круга больше 2.
2. его окружность описана около прямоугольника со сторонами 3 и 1.
3. длина его окружности больше 10.
4. он задается условием $x^2 + y^2 \leq 4$**.**
5. его окружность вписана в равносторонний треугольник со стороной 9.

17) *Оценка численного значения величины*

1. Одна сторона треугольника равна 20, вторая сторона этого треугольника равна 10. Тогда третья сторона *x* этого треугольника удовлетворяет неравенству $5 < x < 35$.
2. Сторона *a* треугольника удовлетворяет неравенству $10 < a < 20$, сторона *b* этого треугольника удовлетворяет неравенству $100 < b < 200$.

18) *Сравнение величин*

$\varphi > 45^0$

1. если $ABCD$ – квадрат, BKC – равносторонний треугольник вне этого квадрата, $\varphi = \angle BAK$.
2. в треугольнике со сторонами 1 и 2, если сторона, равная 1, лежит против угла 30^0, а угол φ лежит против стороны, равной 2;
3. в прямоугольнике со сторонами 1 и 2, в котором угол φ – это угол между его диагоналями;
4. в трапеции, в которой три стороны равны, диагональ перпендикулярна боковой стороне, φ - это угол между диагональю и основанием;
5. в окружности с диаметром $AB = 2$, если проведена секущая CB и касательная CA из точки C, лежащей вне данного круга, причём $CA = 1$, $\angle CBA = \varphi$;

19) *Свойство объекта, полученное в результате преобразования*

Эта фигура имеет не меньше двух элементов симметрии.

1. равносторонний треугольник, в котором проведена медиана ;
2. прямоугольник, в котором проведена диагональ;
3. окружность, в которой проведён диаметр;
4. квадрат, в котором проведена средняя линия;
5. куб, на двух соседних гранях которого вне его построены меньшие кубы, при этом рёбра меньших кубов соответственно параллельны рёбрам исходного куба, а центры нраней меньших кубов совпадают с центрами граней исходного куба.

Тесты, предлагавшиеся на экзаменах.

В какой-то момент я решился на проведение экзамена по тестам. Самое ценное (и самое приятное) для меня в этом экспериментальном экзамене (до него мои ученики вообще не работали с тестами) — совпадение в целом его итогов с результатами текущих достижений.

Много оказалось и такого, о чём стоит размышлять дальше...

В 1999/2000 учебном году экзаменовались ученики одного восьмого, одного девятого, двух десятых и одного одиннадцатого классов — всего порядка 80 человек. В 9 и 11 классах экзамен был выпускным и по выбору. До экзамена ученики никогда не работали с тестами, и на консультациях был проведен подробный инструктаж.

В каждом классе на экзамен отводилось 4 ч. Расчет был простой — всего 12 тестов, в каждом по 5 заданий, итого 60 заданий. На каждое задание я положил в среднем 3 мин, итого 180 мин, т.е. 3 ч. Плюс один час «про запас». Оказалось, что дольше всех, почти под звонок, работали старшеклассники.

Теперь подробности. Напомню, что каждое тестовое задание — некоторое утверждение. Оно задано в словесной форме — по техническим соображениям я не стал давать задания на готовых рисунках.

Вот для примера конкретный расчёт. Пусть ученик дал 60 ответов, из которых 45 верных и 15 неверных. Начисляем ему 45 баллов и высчитываем 15—в итоге он набирает 30 баллов. Если же он даёт те же 45 верных ответов, а на оставшиеся 15 ставит 0, то ему начислено таки 45 баллов. Тут же замечу, что ученикам до экзамена было сказано, что отличную оценку они получат за 45 баллов , оценку «4» — за 40 баллов , оценку 3 — за 30 баллов . Реально почти так и получилось, но я сразу предупредил, что возможен некий люфт в этих критериях. Это вполне естественно, так как никакого опыта в тестовых по форме экзаменах по геометрии у меня не было (а у кого был?). В результатах, показанных учениками тогда, стоит отметить максимальный — 56 баллов и минимальный, оказавшийся отрицательным. Спустя несколько лет был показан и максимальный результат – 60 баллов.

Реально экзамен выглядит так. Каждый ученик получает листок, на котором все тесты, бланк ответов, в который он должен внести полученные результаты, листы бумаги для работы. В бланке не разрешалось делать никаких исправлений. Разумеется, таковые обнаруживаются, но тогда результаты, как первоначальные, так и вновь полученные в исправленном задании, уже не учитываются, как если бы ученик вообще к нему не приступал. Впредь я думаю за исправление также снимать один балл с общего результата ученика. Ученик сдаёт только задания и бланк. Допускается использовать калькуляторы.

Каковы же впечатления от итогов?

1. Проверка одной работы занимает 1 мин.
2. Отметки, полученные учениками, в целом соответствуют их годовым отметкам. Разница между ними в 2 балла была исключением и только в лучшую для ученика сторону.

Мне ясно, что тестовая форма экзамена себя оправдала, несмотря на существенные затраты времени при составлении тестов. Разумеется, не считаю, что тестовая проверка на экзамене единственно разумная, а предлагаемая мной тестовая «идеология» и «технология» оптимальны для проведения экзамена в тестовой форме. Скорее, наоборот, здесь многое находится в стадии эксперимента, а потому неизбежны ошибки, заблуждения и неудачи.

Я приведу некоторые тесты, предлагавшиеся на этих экзаменах.

Треугольник (8 класс)

В треугольнике одна сторона равна 1, другая сторона равна a, а угол между ними 30°.

Верны такие утверждения:

1) если третья сторона равна 0,8, то этот треугольник остроугольный;
2) если этот треугольник остроугольный, то он не является равнобедренным;
3) если площадь этого треугольника равна 1, то этот треугольник тупоугольный;
4) если этот треугольник равнобедренный, то его периметр больше чем 3;
5) если этот треугольник прямоугольный, то его площадь больше чем 0,25.

Треугольник (9 класс) Две стороны некоторого треугольника равны 10 и 20. Тогда:

1) если в этом треугольнике есть ось симметрии, то его периметр равен 50;
2) если периметр этого треугольника равен 60, то он тупоугольный;
3) если угол между данными сторонами прямой, то радиус его описанной окружности больше 10;
4) если его площадь равна 100, то он остроугольный;
5) если один из углов 150°, то против стороны, равной 10, лежит угол, больший чем 15°.

Расстояние в пространстве (10 класс)

Зависимость y от x линейная.

1) $ABCDA_1B_1C_1D_1$ - куб, $AD=x$, $DB_1=y$.
2) $ABCD$ — правильный тетраэдр, $DD_1=x$, $BC=y$, D_1 — центр грани ABC.
3) $PABCD$ — четырехугольная пирамида, в которой все рёбра равны, P_1 — центр основания, Q — центр боковой грани; $PP_1=x$, $P_1Q=y$.
4) $PABC$ — тетраэдр, $AB = BC = CA = PB = x$, $PB \perp (ABC)$, $KL = y$, K — середина AP, L — середина BC.
5) $ABCA_1B_1C_1$ — призма, $AB = BC = CA = x$, $CC_1=y$, $\angle C_1CA = \angle C_1CB$.

Объём (11 класс) Объём некоторого тела больше 10, если это тело:

1) прямоугольный параллелепипед, диагональ которого, равная 30, образует равные углы с гранями, имеющими с ней общую точку;
2) тетраэдр, у которого пять рёбер равны 4;
3) правильная четырехугольная пирамида, у которой боковые рёбра равны 2;
4) цилиндр, у которого осевое сечение имеет площадь 6;
5) конус с площадью поверхности 16.

Использование таких тестов требует развёрнутого комментария.

1. Тесты готовности могут применяться : а) для текущего или итогового контроля; б) для отбора учеников на продвинутый уровень; в) при поступлении школьников в высшее учебное заведение.
2. Содержание тестов соответствует школьному курсу математики, включая повышенный уровень — для физико-математических школ.
3. Все тесты предполагают выборочную форму ответа такого вида: да, нет, не знаю (затрудняюсь ответить, пропускаю задание), условие некорректно, условие не позволяет дать однозначный ответ (соответствующая кодировка такова: +, -, 0, !, ?).
4. Система подсчёта результатов теста такова.

Я ставил «+1» за верный ответ, «-1» за неверный, «0» за ответ «не знаю» (любопытно, что пару раз именно последний ответ был верным, например, на вопрос: является ли sin 1 рациональным числом?).

5. Все тесты предполагают компьютерный вариант. Иначе говоря, ученика можно усадить за компьютер, запустить программу — и проверка началась. После окончания работы возможна распечатка, в которой каждому будет указано, на какие вопросы он ответил правильно, а также общая сумма набранных им баллов.
6. Вопрос о валидности этих тестов остается открытым просто потому, что нужно сначала набрать достаточный экспериментальный материал. К сожалению, до этого ещё очень далеко.

И всё бы хорошо, но дьявол, как говорится, сидит в деталях. При формулировке определённых тестовых заданий я встретился с заметными логическими и языковыми трудностями. Что, собственно, имеется в виду, когда задается, к примеру, такой вопрос: «Верно ли, что $a^2>1$?» (Для простоты будем считать, что переменная a задана на максимально «широком» множестве — множестве всех вещественных чисел.)

Если мы спрашиваем «Верно ли?», то дальше имеем дело с высказыванием. Однако напрямую здесь высказывания нет — есть предикат (выражение с переменной, высказывательная форма) или даже что-то ещё из-за вопросительной формы задания. Чтобы превратить его в высказывание, требуется на переменную a «навесить» некий квантор — всеобщности или существования (и в какой-то момент убрать вопросительную форму). Какой же квантор — по умолчанию — «навешен» на переменную a в таком задании? Если подразумевается квантор всеобщности (верно ли для любого a ...), то ответ «нет». Если подразумевается квантор существования (верно ли, что существует *a...),* то ответ «да». В любом случае ответ меня никак не устраивал. Я-то хочу, чтобы ответ был такой: «Смотря какое a » или, что равносильно, «иногда да, иногда нет».

Некая тонкость в ситуации связана с тем, что отрицательный ответ на поставленный вопрос может даваться в двух различных случаях, представляющих интерес для учителя. То, что спрашивается, может никогда не выполняться, но может существовать только один опровергающий пример. Например, при вопросе: "верно ли, что модуль числа отрицателен" ответ "нет" относится к первому виду ответов; при вопросе "верно ли, что модуль числа положителен" ответ "нет" относится ко второму виду ответов. Ответ "нет", разумеется, правилен, в обоих случаях, но нас может интересовать не только этот формально верный ответ. Нам хочется услышать от ученика более полный ответ на второй из этих вопросов: " нет, потому что модуль числа 0 равен 0 ". То есть хочется иметь и этот ответ, и ученическое пояснение к нему, полученное без других дополнительных вопросов с нашей стороны вроде: а почему ты сказал "нет", то есть мы хотим получить более полный ответ. Именно эту ситуацию надо как-то зафиксировать. При устном диалоге учителя и ученика я не вижу здесь проблемы, в конце концов, мне нетрудно задать нужный дополнительный вопрос, но как это сделать в письменном задании, причём так, чтобы не сделать ситуацию совершенно тривиальной?

Подтверждение своих сомнений я увидел, когда в статье известного математика Л. Кудрявцева нашел такую фразу:

"Правильный ответ на тест: "Равны ли углы с взаимно перпендикулярными сторонами?" не может быть выражен словами "да" или "нет". Правильный ответ " не всегда"…"

Когда не хватает двузначной логики, приходится что-то выдумывать.

Существование четырех вариантов ответа в моих тестах предполагает не традиционную двузначную логику с ответами " да " или " нет", а начатки другой логики. Что тут известно? Известны трёхзначная логика (Я. Лукасевич, А.Гейтинг), четырёхзначная логика (Н. Белнап), многозначная логика (Э. Пост) и даже бесконечнозначная логика (Г. Рейхенбах). Четырёхзначная логика Н. Белнапа почти точно описывает ситуацию, которую я предлагаю в тестах готовности. Так что ничего сверхестественного, противоречащего науке, в такой логике нет.

Ситуацию я вижу непростой, ибо она «завязана» на язык — естественный и математический. Принятые в математике кванторы «убивают» неопределённость.

Что было делать? Я решил как-то закодировать неопределённость с помощью слова «некоторый».

Перейду к примерам. Задание таково: «Пусть a —некоторое вещественное число. Верно ли неравенство $a^2>-1$.Разумеется, ответ «да», ибо оно верно всегда. Пусть задание таково: «Верно ли неравенство $a^2<-1$?» Разумеется, ответ «нет», ибо оно всегда неверно. Пусть задание таково: «Верно ли неравенство $a^2>1$?» А теперь ответ таков: «Иногда да, иногда нет». И ещё знак ответа надо было придумать. Знак «+» я оставил для ответа «да», знак «-»— для ответа «нет», а для ответа «иногда да, иногда нет» использую знак «?»

Наконец, можно убрать вопросительную форму предложения и сразу задать высказывание в такой форме: «Пусть a — некоторое вещественное число. Неравенство $a^2> 1$ является верным».

Мои сомнения с кодированием неопределённости и даже с её включением в тестовые задания утихли, когда я увидел в учебнике логики В. Светлова, что неопределённость имеет все права гражданства. Но как её зафиксировать в тексте, причём так, чтобы увязать с чем - то реальным? Термин "некоторые" вроде подходит, мы все помним начало сказок " в некотором царстве, в некотором государстве"…То есть в каком-то, но не в каждом.

Однако в логике термин "некоторый" имеет не тот смысл, который вложил в него я, и даже не один смысл, а несколько. Один из них, точно подходящий моим намерениям, таков. Фраза "Некоторый объект обладает таким-то свойством " означает, что объект с таким свойством существует, но не каждый объект из универсума (рассматриваемого множества объектов) этим свойством обладает. Хочется, чтобы этот термин понимался так, как он понимается в утверждении « некоторые прямоугольники являются квадратами » или « некоторые натуральные числа являются совершенными ». Иначе говоря, речь идет о конъюнкции двух утверждений: "Существует объект, имеющий данное свойство " и " Существует объект, не имеющий данного свойства" (при этом объекты принадлежат одному и тому же множеству). Если перевести этот разговор на множества, то дело сводится к тому, чтобы задать собственное подмножество данного множества: непустое множество A является собственным подмножеством множества B, когда его дополнение до B является непустым. Ни квантор всеобщности, ни квантор существования не обеспечивают непосредственно такой ситуации, а термин «некоторые» подходит: «некоторые элементы из B образуют множество A».

Если принять такую точку зрения, то оценка истинности суждений меняется по сравнению с той точкой зрения, которая была предложена мною в тестах. Суждение " При некотором значении $a \in \boldsymbol{R}$ выполняется неравенство $a^2 < -1$ " не является истинным, ибо таких значений a не существует. Суждение " При некотором значении $a \in \boldsymbol{R}$ выполняется неравенство $a^2 > -1$ " не является истинным, ибо оно верно при любом значении a. А суждение " при некотором значении $a \in \boldsymbol{R}$ выполняется неравенство $a^2 > 1$ " является истинным, ибо оно верно при каком - значении a, но не при любом.

При таком подходе отпадает необходимость в специальном знаке вопроса в качестве ответа - по-прежнему можно обойтись знаками + и - .

И, наконец, чтобы избежать возможных упреков в нарушении привычного от математиков и лингвистов, можно вместо "некоторый" употреблять в тексте "некоторый, но не каждый", "некоторые, но не все".

По сути дела общепринятые кванторы $\exists$ и $\forall$, которые мы навесили на переменную в высказывательной форме указывают (косвенно) на число элементов множества, обладающих указанным свойством. Что может представлять интерес? Есть ли хотя бы один элемент с таким свойством или их нет? Следующий вопрос - если есть хотя бы один, то сколько их на самом деле? Все или не все?

Появляются оттенки. Нам нужно знать точно - один такой элемент или хотя бы один. И появляется новый квантор - $\exists!$, который указывает на существование и притом одного элемента с данным свойством. Квантор, соответствующий тому, что элементы с данным свойством есть, но не каждый элемент обладает этим свойством - также выдает некий оттенок информации, которая бывает полезен.

Для записи суждения с термином "некоторый" можно даже придумать какой-то символ, в чём-то напоминающий знаки $\forall$ или $\exists$. Может быть такой - N? Или даже такой "$\exists$?" или такой "$\forall$?".

Вместе с тем мне не хочется вводить в собственную школьную практику новый квантор - всё-таки в "мире кванторов" ситуация достаточно устоялась. Именно поэтому в системе ответов я избегаю обычных ответов "да" или "нет" на утверждение с термином " некоторые".

Мы видим в итоге некую зыбкость в ситуации, когда предлагаемое для оценки утверждение имеет повествовательную форму. Может быть вообще отказаться от неё и вернуться к вопросительной, используя вопрос " верно ли?"

А что было на практике? Возьмём тест про объём из тестов на экзамене. Первое утверждение верно, поскольку прямоугольный параллелепипед, отвечающий условию, является кубом, а для куба это верно. Третье утверждение неверно, так как даже наибольший объём такой пирамиды меньше десяти. Неверным является и пятое утверждение, ибо даже шар с такой площадью поверхности имеет объём, меньший десяти. А вот второе утверждение не позволяет дать однозначный ответ, так как тетраэдр, отвечающий условию, может иметь объём, как больший десяти, так и меньший десяти. Поэтому верный знак в ответе на это задание — «?». Такой же ответ и в четвёртом утверждении.

Чтобы хоть как – то оценить тесты готовности, стоит попытаться осмыслить общий фон, на котором происходит тестирование в российском математическом образовании.

Тесты по математике признаны, издаётся много их различных вариантов. Уже проводились в тестовой форме и выпускной экзамен, и вступительный в иные вузы, да и в ЕГЭ они использовались. Несколько раз проходила научно-методическая конференция по тестированию, появился журнал «Вопросы тестирования в образовании». Тесты естественно вписываются в современные педагогические концепции — в самом деле, по мере взросления учеников падает чувствительность наставников к их ошибкам — пусть дети учатся находить свои ошибки самостоятельно. Но тогда от привычных форм контроля вполне естественно перейти и к более сжатым. В частности, не обязательно досконально проверять ученические работы, как мы привыкли, да ещё подчёркивая красным сделанные ошибки, достаточно ограничиться только проверкой ответов. На основании такой именно проверки выставлялись отметки на иных вступительных вузовских экзаменах. Использование тестов совершенно естественно вписывается в эту тенденцию.

Вместе с тем растёт и негативная реакция на их использование. С чем я безоговорочно согласен в критике тестовой проверки — так это: 1) с их «американизацией» (если так можно выразиться) по содержанию и форме, 2) с их непродуманным применением.

Чуть подробнее. 1) *Про «американизацию».* Я плохо понимаю тесты, в которых нужно выбирать ответ между, скажем, пятью предложенными числами, из которых одно верное. Откуда берутся остальные четыре числа? Добро бы они соответствовали наиболее часто встречающимся ошибкам учеников, но вряд ли такое возможно аккуратно сделать даже теоретически.

Далее, тесты с принудительным выбором ответа, я бы сказал, психологически агрессивны потому как выбор одного из ответов обязателен. Предлагаемая мной форма теста психологически более мягкая, она, можно сказать, имитирует диалог: ученику нечто сказали, и он как бы вступает в обсуждение предложенного утверждения.

Ответ «не знаю» полезен, ибо при дальнейшем обсуждении с конкретным учеником результатов его тестирования можно выяснять, почему появился этот ответ? Истинное знание проявляется тогда, когда можно отделить то, что знаешь, от того, что не знаешь.

2) *О применении*. Тестовая проверка — всего лишь средство для достижения определённых целей. Беда начинается тогда, когда оно используется не для тех целей. А если и для тех, то объявляется единственным; к тому же насаждается насильственно. Я не думаю, что могут быть серьёзные возражения против экспресс-анализа где бы то ни было, в том числе и в образовании. Надо только понимать, что это экспресс-анализ, и чётко представлять себе границы его применимости.

Итак, по моему разумению тестовая и обычная проверка ученика не противоречат одна другой, а дополняют друг друга и прекрасно могут ужиться. То, что их убрали из заданий ЕГЭ, говорит только об одном: их содержание, форма и способ применения не были достаточно продуманы.

Несколько заключительных замечаний.

1) Тесты готовности могут применяться для текущего контроля (в том числе – дифференцированного), для итогового повторения и контроля, при отборе учеников для дальнейшего обучения математике и просто в диагностических целях (как это сделано в конкурсе «Кенгуру для старшеклассников»); разумеется, в образовательных учреждениях любого вида - из условия теста легко понять, где его использование наиболее уместно. При желании можно переставлять конкретные задания внутри каждого теста, а также составлять из приведённых заданий другие тесты. Можно также выбирать любую форму оценивания и шкалирования результатов теста. Можно отказаться от тестов с неопределённым или противоречивым условием, если они «не пришлись ко двору».

2) Реакцию учеников на тесты трудно считать объективной - она слишком зависит от их достижений: хорошо сделал тестовую работу, значит, тесты - это хорошо. И напротив. Тем не менее в их высказываниях можно увидеть нечто общее. К позитиву они относят явную нацеленность на результат - не надо никакой "писанины", пояснений, которые кажутся им не стоящими и выеденного яйца, да и учителю не к чему "придраться". А для части учеников, у которых не ладится письменная речь, тесты – это спасение.

3) Издательство «Просвещение» выпустило тесты готовности для учеников старших классов. Всего их – четырёхзначное число.

Далее — две гипотезы.

Первая гипотеза такова: тесты готовности – несложная, доступная для школьника альтернатива проверке в традиционной форме, когда в первую очередь проверяется память школьника и его действия в стандартной задачной ситуации.

Вторая гипотеза: может быть, с их помощью удастся частично разобраться в феномене под названием «готовность к продолжению математического образования».

111.7. «ХОРОШАЯ ЗАДАЧА ДЕЛАЕТ НАС УМНЕЕ»

Что такое «хорошая задача»? Я много думал, спрашивал у коллег, пытался найти формальные критерии.

Понятие «хорошая задача» для меня не было одним и тем же. Так, одно время казалось, что в задаче обязательно должна быть красивая идея или эффектное искусственное преобразование. Потом перестали устраивать одиночные результаты, захотелось предложить ученикам некоторую последовательную деятельность. Эта идея стала распространяться; например, в Петербурге «сюжетные» задачи одно предлагались и на выпускном экзамене, и на вступительных в вуз. Я приведу примеры таких задач.

1. $y = 3x^3 - 2x - 1$.

а) Найти нули функции на множестве комплексных чисел. Составляют ли они какую-либо прогрессию?

б) Построить график функции.

в) Найти площадь, ограниченную графиком функции и прямой, проходящей через точки пересечения графика с осями координат.

г) Каково уравнение касательной к графику функции в точке (1, 0).

д) Найти объём тела, полученного вращением графика функции вокруг оси x на промежутке [-1, 1].

2. $T(x) = кx^2 - 2кx+1$.

а) При каких значениях $к$ трёхчлен имеет два действительных корня?

б) При каких значениях $к$ трёхчлен имеет два положительных корня?

в) При каких значениях $к$ один из корней равен 1?

г) Составить трёхчлен с корнями, каждый из которых на 1 больше соответствующего корня данного квадратного трёхчлена.

д) При каких значениях $к$ данный трёхчлен положителен при всех действительных значениях x?

е) При каких значениях $к$ $T(x)$ есть чётная функция?

ж) При каких значениях $к$ $T(x)$ возрастает на $\boldsymbol{R}$?

з) При каких значениях $к$ наибольшее значение $T(x)$ равно нулю?

и) При каких значениях $к$ сумма кубов корней трёхчлена достигает экстремальных значений?

3. $|y| = -x^2 + 2x$.

а) Найти площадь фигуры, ограниченной этой линией.

б) Найти три прямые, каждая из которых делит площадь этой фигуры пополам.

в) Найти четыре прямые, не параллельные осям координат, каждаяиз которых отсекает от площади данной фигуры четверть её площади.

г) Существует ли 10 прямых, отсекающих от площади данной фигуры четверть её площади?

4. $ax^2 > 1/(x-a)$.

а) При каких значениях a решения неравенства образуют ограниченный промежуток?

б) Может ли расстояние между концами этого промежутка быть больше чем 10^{10}?

в) может ли расстояние между концами этого промежутка быть меньше чем 10^{-10}?

В какой-то степени в этих задачах отражено моё понимание того, что такое «хорошая задача». Понимание, которое было в те годы. Сегодня я пришёл к другому. «Хорошая задача» — та, которая нравится. А нравиться может только такая задача, которая соответствует установке. С годами установка меняется, а потому меняется и понимание «хорошей задачи». Сейчас для меня главное — организация посредством задач исследовательской деятельности ученика – о ней хорошо написано у Д.Пойа. В таких задачах я выделяю 10 моментов. Вот они:

1. Наблюдение.
2. Прогнозирование (предвидение) результата.
3. Опровержение гипотезы.
4. Планирование исполнения.
5. Исполнение.
6. Коррекция.
7. Контроль.
8. Оценка.
9. Использование, применение.
10. Развитие темы.

Разумеется, этот список может быть так или иначе подправлен, или дополнен (например, включением анализа условия задачи), или даже отвергнут. Но меня он пока устраивает. Я постараюсь дать ему сейчас толкование и привести примеры.

1. *Наблюдение.* Когда мы даём ученику задачу на доказательство, то он уже знает, к какому результату надо придти. Важно, однако, чтобы ученик сам организовал свою работу по «добыванию результата». Классические примеры: поиск какой-либо формулы для числовой закономерности, отыскание формулы Эйлера для многогранников и т. п.

Организовать такую работу для учеников можно, к примеру, почти в любой задаче на расположение геометрических объектов. Коллективная работа в классе позволяет рассмотреть много вариантов одновременно. Например, центральная симметричность произвольного цилиндра наблюдается тогда, когда является центрально-симметричным его основание. Заметив это, приступаем к доказательству.

2. *Прогнозирование.* При доказательстве надо чётко знать, что хочешь доказать. Прекрасно, когда можно организовать наблюдение, а если непонятно, что и как наблюдать? К счастью, иногда помогает аналогия.

Вот пример. Какой фигурой является множество точек пространства, равноудалённых от граней двугранного угла и лежащих внутри него? Гипотеза возникает по аналогии с планиметрической задачей о биссектрисе угла.

Полезно рассмотрение частных случаев. Если в геометрической задаче искомая величина в трёх разных случаях принимает одно и то же значение, то не исключено, что она является константой и в общем случае. Основа тому предположению такова – как правило, в геометрической задаче величина является линейной или квадратичной функцией от разумно выбранного параметра. И если при трёх значениях параметра эта функция равна одному и тому же числу, то скорее всего она является постоянной.

Один пример – требуется найти периметр прямоугольника, вписанного в квадрат так, что его стороны параллельны диагоналям квадрата. Этот периметр один и тот же в трёх случаях, из которых два вырожденных (когда этот прямоугольник вырождается в диагональ), а третий случай – когда он является квадратом.

Бывает так, что геометрическая задача на нахождение величины недоопределена, иначе говоря, условию задачи отвечает множество различных случаев. Выберем случай наиболее удобный для получения результата и найдём значение искомой величины в этом случае. Затем заподозрим, что полученный результат является ответом и в общем случае.

Вот пример. Имеется равносторонний цилиндр. В нём проведён диаметр (наибольшая хорда). Под каким углом виден этот диаметр из произвольной точки окружности основания цилиндра? Таких точек бесконечное множество. Выберем ту, которая является вершиной того осевого сечения цилиндра, в котором находится данный диаметр. Искомый угол будет прямым. Может быть, он всегда прямой?

Реже помогает интуиция. Что есть интуиция, когда она возникает, как ее «запустить» — об этом можно только догадываться. Однако существование пространственной интуиции, по – видимому, не вызывает сомнений.

Как-то мне пришлось провести несколько уроков геометрии в американской школе, в старших классах. И школа хорошая, и дети хорошие, да вот беда — не изучают они толком геометрию. Стереометрии практически нет, от всей планиметрии остались только формулы, на работу с которыми уходит основное время. При этом они много работают с калькуляторами , с компьютерами, доверяя им больше, чем своей голове. Я предложил им по случаю сказать, что это будет за линия, уравнение которой $x^2+y^2 = a$, так они сразу же стали нажимать кнопки очень продвинутого калькулятора.

Как сказал мне один американский коллега — в его шкафу стояло около 200 математических книг, из которых геометрических то ли одна, то ли две: «Геометрия — это тот сад, мимо которого прошла Америка».

Чтобы «вдохнуть» в американских школьников немного геометрического духа, я решил рассказать им (студентам — так их величают в США) о пространственной интуиции. На первом уроке я показал, что она существует и может помочь в решении задач. На втором уроке оказалось, что она у всех разная, т. е. разным ученикам она может подсказать разные решения и даже порой обмануть. Третий урок —небольшая лекция о том, в каких ситуациях ей можно доверять.

Как я понял, самое большое впечатление на них произвело то обстоятельство, что в математике можно рассуждать и получать результаты, не прибегая к формулам.

(Здесь будет уместно сказать пару слов об американском математическом образовании - привыкли мы к нему относиться чуть ли не свысока. И повод высказаться хороший - известный наш сатирик на своем концерте привел - как пример их "ужасной" образованности - минидискуссию между нашим и американским профессором на этакую глобальную тему: чему равняется выражение $2 + 2 \cdot 2$. Наш профессор говорил - 6, а их профессор говорил - 8. И не разобрался наш образованный сатирик, в чём тут дело, почему возникло разногласие. А вот почему. Наше вычислительное образование - бескалькуляторное, и порядок действий в арифметическом выражении зафиксирован некоторыми соглашениями. Согласно им, в этом примере (при бесскобочной записи) сначала выполняется умножение, а потом сложение - получается 6. Американское вычислительное образование – «калькуляторное», а разные типы калькуляторов работают по разным соглашениям, о чем пишется в инструкции. В некоторых калькуляторах порядок действий последовательный, и в соответствии с этим соглашением и получается 8.

А "проблема" возникла от того, что в такого рода выражениях полагается ставить в надлежащем месте скобки. А если их нет, то и работает не математика, а договорённость. Разные договорённости приводят к разным результатам - вот и всё.

Американское образование не похоже на наше, оно иное, нежели наше. Главное в нём не предмет, а социальная и личностная направленность. Как добиться успеха в жизни, как ладить с людьми и т. п. - вот что для них самое существенное, а не алгебра с физикой.)

Рассмотрим теперь хорошо известную задачу: «В трёхгранном угле два плоских угла равны. Доказать, что общее ребро этих углов проектируется на прямую, проходящую через биссектрису третьего плоского угла». В такой формулировке задача не так интересна, ибо результат уже известен. Сформулируем её иначе: «Лучи *OA* и *OB* лежат в плоскости α. Луч *OC* образует с ними равные углы. Какое положение на плоскости α занимает проекция луча *OC* на эту плоскость?» Во-первых, можно организовать простейшие наблюдения, когда луч *OC* лежит в плоскости α и когда он перпендикулярен ей. Во-вторых, наблюдения можно усложнить. Для этого достаточно вспомнить правильную пирамиду. Её боковое ребро как раз отвечает условию задачи, а где лежит его проекция — понятно. И наконец, можно использовать пространственные представления. Для этого вообразим себе, что мы смотрим как бы сверху на луч *OC* в направлении перпендикуляра к плоскости α . Что мы увидим? Этими наблюдениями и работой воображения результат как бы предвосхищён. Но если предложить предугадать его и до проведения такой работы, тогда мы надеемся на работу (геометрической) интуиции.

3. *Опровержение гипотез.* Мало ли что нам может померещиться, когда мы пытаемся предвидеть

результат! Прежде чем нечто доказывать, надо попытаться это опровергнуть. Учить опровержениям — долгая работа, о ней я буду говорить дальше.

Здесь ограничусь таким примером: «Через середину высоты усечённого конуса провели сечение, параллельное основанию. Было высказано предположение: площадь сечения равна среднему арифметическому площадей оснований. Верно ли это предположение?» Замечу, что аналогичное утверждение на плоскости верно — это теорема о средней линии трапеции. Тем не менее в данной задаче мы имеем дело с неверным утверждением. Чтобы убедиться в этом, достаточно взять предельный случай усечённого конуса, когда верхнее основание стягивается в точку. В такой ситуации получаем конус, а для него гипотеза, сформулированная в задаче, неверна. Ссылка на непрерывность – и результат получен.

4. *Планирование исполнения.* Сколько раз учитель видит одну и ту же картину: ученик, получив задачу, хватается за перо и начинает выписывать хоть что-нибудь. И как тут не вспомнить известное сравнение плохого архитектора с хорошей пчелой! Планированию тоже надо учить, учить специально — намечать план решения задачи. Очень часто на доске я оставлял только план решения, а само решение уже доводят до конца дети, причём это задание может быть и домашним. Кроме того, этим экономится классное время.

5. *Исполнение.* Это наиболее ясный этап в работе.

6. *Коррекция.* Часто первоначально выбранный план решения заводит в тупик из-за технической сложности работы. Я уже не говорю о том, что в результате проделанной работы получается совсем не то, что хотелось. Примеров тому великое множество, и я не буду их приводить.

7. *Контроль.* Умение контролировать свою работу чрезвычайно важно. О нём я буду говорить дальше.

8. *Оценка.* Когда решение задачи получено, не надо торопиться переходить к следующей задаче. Стандартный вопрос: нравится ли тебе самому полученное решение? Нельзя ли короче? Здесь уместно сравнение своей работы с тем, что сделано одноклассниками, учителем, напечатано в книге.

9. *Использование, применение. А* что можно сделать с полученным результатом? Какие следствия из него можно получить? Нельзя ли его использовать для получения ранее известных результатов?

Вот пример. Если есть луч OA, его проекция OA_1 на некоторую плоскость и луч OB в этой плоскости, то известна формула $\cos\angle AOB = \cos\angle AOA_1 \cdot \cos\angle A_1OB$.

Как только мы её получили, опять можно вернуться к задаче о проектировании ребра трёхгранного угла, которую я только что упоминал. С помощью этой формулы её результат получается легко.

Можно ставить вопрос о распространении найденного способа решения на другие задачи. Например, исходя из соображений монотонности, решено иррациональное уравнение. Можно ли таким же образом решать уравнения другого вида?

10. *Развитие темы.* Результат получен. Нельзя ли его обобщить? Верны ли обратные утверждения? Быть может, в связи с ним появились какие-то новые мысли?

Полезный пример развития темы, точнее, идеи решения — перенесение метода интервалов с прямой на плоскость, но уже для двух переменных. К примеру, надо изобразить на плоскости множество точек, удовлетворяющих условию $(x - y)(y-2x)>0$. Проведём прямые $y = x$ и $y = 2x$. Они разобьют плоскость на четыре угла. Возьмём точку внутри любого из них, желательно с «хорошими» координатами, например (2; 5). Подставим эти координаты в левую часть неравенства. Полученный знак этого выражения («+» или «-») поставим в соответствующем углу. Переходя через каждый из нарисованных лучей, мы будем менять знак в углу на противоположный. Те углы, в которых будет стоять знак «+», покажут множество решений данного неравенства.

Этот метод можно использовать и тогда, когда области на координатной плоскости ограничены не только прямыми .

Приведу пример «хорошей», по-моему, задачи, точнее, пример того, как задача может быть превращена в «хорошую»: «На данном отрезке *AB с* одной стороны от него построены два перпендикуляра AA_1 и BB_1. Проведём отрезки AB_1 и BA_1. Пусть они пересекаются в точке C. Найти расстояние от точки C до прямой AB, если $AA_1=a$, $BB_1=b$» (рис. 98).

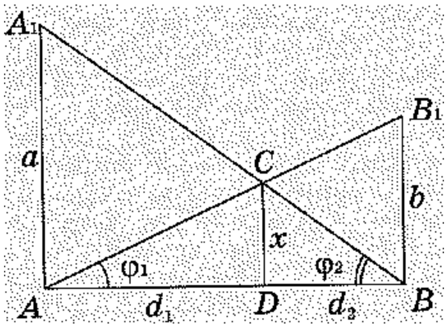

Рис. 98

Эту задачу можно решать уже в девятилетке, но я её люблю решать в начале 10 класса, когда повторяю планиметрию. Самое интересное в ней — независимость искомого расстояния от величины AB. И это самое интересное почти содержится в данной формулировке в готовом виде. Разумнее сделать иначе.

Сначала организуем некое наблюдение. Предложим ученикам в тетради провести горизонтальный отрезок любой длины, естественно, длины получатся разными. Затем они выполняют построение, указанное в задаче, после чего измеряют расстояние от точки C до прямой.

Результаты пока ни о чём не говорят. Теперь задаём вопрос: зависит ли это расстояние от длины AB или нет? Ответы обычно разные. Можно рассказать для живости, что вам нужно подвесить фонарь с помощью такой конструкции. Более того, мы хотим, чтобы фонарь висел на заданной заранее высоте. Так будет ли высота фонаря зависеть от расстояния между столбами, которые придётся врыть в землю?

Пусть мы считаем, что зависит. Попытаемся это опровергнуть, подчеркиваю: не доказать, а опровергнуть. Делается это не очень сложно. Если мы возьмем отрезки AA_1 и BB_1 равной длины, то из свойств прямоугольника ясно, что искомое расстояние равно половине длины перпендикуляра AA_1 и никоим образом не зависит от длины AB,

К гипотезе о независимости можно прийти в результате наблюдения, если предложить на начальном этапе ученикам поработать с отрезком AB одной и той же длины, меняя только длины перпендикуляров.

План решения может быть таким (см. рис. 98).

Введем обозначения: $AB = d$, $AD = d_1$, $DB = d_2$, $CD = x$, $\angle B_1AB = \varphi_1$, $\angle A_1BA = \varphi_2$.

Тогда $x = d_1 \operatorname{tg} \varphi_1 = d_1 \frac{b}{d}$ - с одной стороны, и $x = d_2 \operatorname{tg} \varphi_2 = d_2 \frac{a}{d}$ - с другой стороны. Кроме того, $d_1 + d_2 = d$. В результате получается система двух линейных уравнений относительно d_1 и d_2. Само решение, т. е. реализация этого плана, трудностей не представляет.

Ответ $x=\frac{ab}{a+b}$ подтверждает справедливость гипотезы о независимости искомого расстояния от начальной длины горизонтального отрезка. Если бы у нас была принята гипотеза о зависимости, то необходимо было бы скорректировать исходное предположение.

О других видах контроля речь пойдет дальше.

Решение задачи может быть чуть короче, если воспользоваться подобием треугольников.

О полученном результате есть что сказать. Средним гармоническим положительных чисел a и b

называется выражение $\dfrac{2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}$, обратное для среднего арифметического чисел ($1/a$) и ($1/b$) .

Теперь мы видим, что полученный результат составляет половину от среднего гармонического длин перпендикуляров.

Здесь уместно рассказать ученикам о происхождении термина «среднее гармоническое».

Далее, с помощью рисунка сразу получаются два таких неравенства:

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} < a, \quad \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} < b.$$

И наконец, используя этот результат и несложные преобразования, можно, имея данный отрезок a и единичный отрезок, построить отрезок ($1/a$). Для этого достаточно вместо b взять этот единичный отрезок, после чего решение просто.

Завершить задачу хорошо её различными обобщениями.

Во-первых, перпендикуляры можно откладывать в разные стороны от данного отрезка, при этом открываются интересные особенности в получающейся формуле. Во-вторых, необязательно брать именно перпендикулярные отрезки, можно перейти к параллельным между собой, но образующим с исходной прямой острый угол. Для них тоже можно рассмотреть оба случая: по одну и по разные стороны от данной прямой. Наконец, «на сладкое» такая вариация на заданную тему. Пусть в исходной конфигурации с перпендикулярами дано, что $AB_1 = 2$, $BA_1 = 3$, $CD = 1$. Задание «Вычислить AB» приводит к уравнению, которое неясно, как решать (известная задача египетских жрецов) . И начинаются новые разговоры.

Один из них - несколько странный. Вид ответа $\dfrac{1}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}$ настолько напоминает ответ в задаче на совместную работу или совместное движение, что аналогия напрашивается сама собой. Вот формулировка такой типичной задачи: "Две машины выехали одновременно по одной дороге навстречу друг другу - одна из пункта A в пункт B, а другая из пункта B в пункт A и движутся с постоянными скоростями. Первая машина проходит весь путь за время T_1, а вторая - за время T_2. Через какое время они встретятся?" А ответ здесь такой: $\dfrac{1}{\dfrac{1}{T_1}+\dfrac{1}{T_2}}$.

Вернёмся к рисунку 66. Будем считать, что длина отрезка AB (d) - исходное расстояние между пунктами A и B, $BB_1 = T_1$, $BB_2 = T_2$. Обозначим угол AB_1B (он же угол ACD) как β, а угол AA_1B (он же угол BCD) как α. Теперь геометрические соотношения можно трактовать как отношения между величинами в процессе движения. Именно: $\mathrm{tg}\ \alpha = AB / BB_1 = d / T_1 = V_1$ (скорость первой машины), $\mathrm{tg}\ \beta = AB / AA_1 = d / T_2 = V_2$ (скорость второй машины). Далее: $AD = d_1$ - это путь первой машины до встречи, $BD = d_2$ - это путь второй машины до встречи. Но что такое $x = CD$?

Запишем равенство: $d = d_1 + d_2 = x\ \mathrm{tg}\ \alpha + x\ \mathrm{tg}\ \beta = xV_1 + xV_2 = x\ (V_1 + V_2\ ) = xV$, где V - скорость сближения двух машин. Тогда $x = d / V$, то есть время сближения, иначе говоря, время, через которое они встретятся. Впрочем, эта незатейливая выкладка необязательна. Ответы в данной геометрической задаче (назову её «задачей о трёх расстояниях») и приведённой задаче на движение столь похожи, что можно сразу перевести эту ситуацию с геометрического языка на "человеческий".

Возможно и обратное – перевод текстовой задачи на геометрический язык. Этот метод для многих задач подробно разобран А. Островским и Б. Кордемским, я уже говорил о нём выше.

Вернёмся к геометрии. Есть не одна задача на вычисление, ответ в которой напоминает нам о среднем гармоническом.

1. В прямоугольный треугольник с катетами a и b вписан квадрат. Одна его вершина находится в вершине прямого угла, две других - на катетах, а четвертая вершина - на гипотенузе. Тогда сторона квадрата равна $ab / (a + b)$.

2. В равнобедренном треугольнике ABC проведены биссектрисы углов A и C при основании - AK и CL. Основание треугольника равно b , боковая сторона равна a. Тогда хорда треугольника KL равна $ab / (a+b)$.

3. Основания трапеции равны a и b. Длина хорды трапеции, параллельной основаниям и проходящей через точку пересечения ее диагоналей равна $2\, ab / (a + b)$.

4. Основания равнобокой трапеции равны a и b. Тогда проекция высоты трапеции на её боковую сторону равна $2\, ab / (a+b)$.

5. Из точки C проведена касательная CD к окружности с диаметром AB. Пусть $CA = a$, $CB =b$.Тогда проекция касательной CD на прямую AB равна $2\, ab / (a+b)$.

6. В угол вписаны две окружности, касающиеся между собой. Пусть радиусы данных окружностей равны R и r. Тогда радиус окружности, касающейся сторон того же угла, центр которой находится в точке касания данных окружностей, равен $2\, Rr / (R + r)$.

7. Окружность касается внутренним образом большей окружности и её диаметра. Точка касания меньшей окружности и диаметра делит диаметр на отрезки a и b. Радиус меньшей окружности равен $ab /(a+b)$.

8. Ребро основания правильной треугольной пирамиды равно a, а боковое ребро равно b. Сторона квадратного сечения этой пирамиды равна $ab / (a+b)$.

К месту будет упомянута физика. Похожий ответ получается в задаче о нахождении средней скорости движения: если на пути из A в B скорость была V_1, а на пути из B в A - V_2, то средняя скорость на пути туда и обратно равна $2V_1V_2 / (V_1 + V_2)$. Есть и другие примеры из физики, которые приводят к похожему ответу - из электричества и оптики.

Порой обобщение позволяет получить более простое решение даже в незатейливой задаче. Вот пример: «Прямоугольный участок земли надо обнести забором. Размеры участка 100 м на 50 м. Для установки забора ставятся столбы на расстоянии 2 м между собой. Сколько потребуется столбов?» Несложно подсчитать нужное число столбов даже в начальной школе, но требуется аккуратность — из-за столбов, которые стоят в углах. А какое возможно обобщение? Оказывается, в этой задаче не существен прямоугольник. Можно взять окружность длиной 300 м и ответить на тот же вопрос, но заботиться об углах уже не нужно. Более того, вместо окружности можно взять любую замкнутую простую кривую (кривую, гомеоморфную окружности) — а вопрос задачи тот же. Затем, пожалуйста, есть тема для разговора о несложных понятиях топологии.

Увы, иногда обобщение может «убить» задачу. Вот пример:

«Дан цилиндр. Его высота равна 10, а радиус основания равен 1. Точка A находится на окружности одного основания цилиндра, точка B — на окружности другого основания, при этом AB проходит через центр симметрии цилиндра. Точка C находится на той же окружности основания этого цилиндра, что и точка A, и удалена от A на 1. Чему равен угол ACB?

После нескольких «тупых» вычислений получаем, что искомый угол прямой. Но задача легко обобщается, и приходим к такой формулировке: «Под каким углом виден диаметр цилиндра (наибольший отрезок, соединяющий две точки цилиндра) из произвольной точки на окружности любого основания?» Такая свободная от численных данных формулировка показывает, что ответ не зависит от выбора точки на окружности основания, но тогда чисто логически угол просто должен быть прямым.

А теперь решение. Опишем около этого цилиндра сферу. Тогда выбранный диаметр цилиндра становится диаметром описанной сферы, выбранная точка на окружности основания цилиндра лежит на этой сфере, а потому нужный нам угол прямой, Эффектно, но это ещё не всё. Попробуем обобщить дальше. Возьмём некую фигуру *F*, а в ней — диаметр. Рассмотрим сферу с центром в середине этого диаметра. Пусть эта сфера проходит через некоторую точку фигуры *F*. Ясно, что из этой точки выбранный диаметр виден под прямым углом — и нет задачи.

Задача тем лучше, чем больше из этих 10 моментов отражено в её решении. Разумеется, задача становится ещё лучше, если она имеет красивое решение, или содержит интересную идею, или знакомит с важным результатом. Вспомним, как сказал Ю. Манин: «Хорошая задача делает нас умнее». Добавлю: после того, как мы её решили.

111.8. О ЗАДАЧАХ В УЧЕБНИКЕ

Последние три десятилетия мне довелось работать в содружестве с А. Александровым и А. Вернером над учебником геометрии. За эти годы созданы учебники для всех классов как массовой, так и математической школы. А. Александров и А. Вернер — профессиональные математики, академик и доктор физико-математических наук, геометры.

* * *

Александр Данилович Александров умер в 1999 г. Мы ещё не вполне представляем себе, что он сделал для математического образования, в первую очередь геометрического, настолько велико его наследие.

Прежде всего я назову сборник — уникальный в своем роде — «Математика, её содержание, методы и значение», изданный у нас в 1956 году и недавно переведённый в США. У этого сборника было три редактора — А. Александров, А. Колмогоров и М. Лаврентьев. В нём три статьи А.Александрова; в первой из этих статей под названием «Общий взгляд на математику» приведён краткий очерк истории математики, рассказано о сущности математики и закономерности её развития. Надо ли объяснять необходимость знакомства учителей с этой статьей?

В 1988 году появился сборник статей и выступлений Александра Даниловича «Проблемы науки и позиции учёного». Вот названия некоторых из них: «Наука и этика», «Математика», «Истина и заблуждение», «Диалектика и наука», «Пусть будет больше одержимых», «От дважды два до интеграла», «Поэзия науки», «Тупость и гений». Особое восхищение вызвала у меня последняя статья из этого списка, в своё время опубликованная в журнале «Квант». Ну сколько раз, казалось бы, рассказывали о геометрии Лобачевского, ну что ещё можно такого нового тут открыть? А.Александров это сделал — и как! Статья читается залпом, как детектив. Александр Данилович обладал редким даром — ясно излагать трудное, даже в специальных работах; ни учителям, ни студентам — будущим учителям не надо «бояться» читать его статьи.

Далее, после его многочисленных статей в журнале «Математика в школе», по существу, «закрыты» многие трудные для преподавания вопросы. Именно: можно ли использовать теоретикомножественные понятия, как толковать векторы, как определить многогранник, как понимать пресловутую строгость? Я уже не говорю о его классической статье «О геометрии». И каким блестящим языком они написаны!

Собрать бы все его статьи, имеющие отношение к нашему делу, обучению математике в школе,— цены бы не было такому сборнику.

Отдельный разговор — написанные им учебники геометрии для школы. Сначала расскажу про одну пикантную ситуацию: меня вдруг вызвал по телефону на краткосрочное свидание некий молодой человек, которого я не знал и которого больше никогда не видел. И задал мне тот человек при встрече всего один вопрос: «А сам ли Александров написал теоретический текст учебника?» Видимо, в чьих-то мнениях не представлялось возможным, чтобы академик с мировой репутацией вот так вот взял ручку и стал для детей доказывать, скажем, признаки равенства треугольников. А я вспоминаю заснеженный Академгородок под Новосибирском, его коттедж, почти весь погружённый во тьму, и только одно светлое окно. Подхожу к жилью, и в этом окошке — склонившаяся над столом седая голова академика. С минуту стою и просто смотрю. Саваоф за работой. Прохожу в дом и вижу на исписанных листках доказательства школьных теорем. Кстати сказать, все эти доказательства Александр Данилович записывал, не прибегая к рисункам — они ему были просто не нужны, весь рисунок вместе с буквами, обозначающими точки, он держал в голове.

То, что он сделал в своём учебнике, уникально, насколько я могу судить, для всей мировой практики преподавания элементарной геометрии. В основе лежит совершенно чёткая собственная концепция геометрии, её преподавания и учебника для детей – она сформулирована в его статьях. (Замечу, что обычно авторы школьных учебников математики не баловали нас рассказом о своём видении курса — а почему он именно такой?)

Далее, А. Александровым создана аксиоматика геометрии, на упрощённом (для школы) варианте которой он выстроил весь курс. Он не раз говорил, что не видит смысла в том, чтобы современные школьники знакомились с основаниями теории на уровне, который был неизвестен К.Гауссу, Н.Лобачевскому, Б.Риману, имея в виду при этом достаточно тонкие аксиомы порядка или непрерывности. Диагонали параллелограмма пересекаются просто потому, что это видно на рисунке!

В учебнике оригинальна и предельно проста последовательность изложения теории — он подчёркивал, что основная линия курса им предельно минимизирована, выстроить её короче вряд ли возможно. Это достигнуто, в частности, за счёт раннего изложения теории площадей (тем самым решились проблемы, связанные с несоизмеримостью, причём на наглядном уровне), а также благодаря раннему использованию теоремы Пифагора и тригонометрии.

В учебнике доказаны (на принятом уровне строгости) все необходимые теоремы за одним только общепринятым исключением — нет доказательств теорем существования при изучении площадей и объёмов. Но об этом в тексте прямо говорится. Александр Данилович настаивал на том, что все теоремы должны быть доказаны, на то и наука. А если не доказано, то нечего это скрывать. Притом он никогда не забывал, что речь идет о детях, и подчёркивал, что наглядность важнее строгости, если выбирать между ними, то последней можно и пожертвовать.

Чуть подробнее по поводу объёмов, изучаемых в старших классах, — разговор начинается с описания класса фигур, для которых объём можно вычислять, именно с понятия простой фигуры, каковой даётся определение. В других известных мне школьных учебниках проблематично существование объёма, например, у полушара и неясно, почему можно говорить о суммарном объёме нескольких кубов, не имеющих между собой общих точек. Для обоснования существования объёма у простых фигур Александром Даниловичем в одной из научных статей была специально доказана соответствующая теорема.

Была у Александра Даниловича и "голубая мечта" - сделать учебник, в котором геометрия строится на конечном куске плоскости. Это полностью соответствует практике - ведь реально нет ни прямой во всей её бесконечности, ни параллельных прямых, которые " нигде не пересекаются". И не вполне естественно выглядит известное доказательство теоремы о сумме углов треугольника, в котором проводится прямая, параллельная данной - причём тут бесконечный объект, каким является прямая? Поэтому вместо традиционной формулировки аксиомы параллельности, он вводит в учебник планиметрии аксиому существования прямоугольника, то есть конечной фигуры.

Полностью осуществить свой замысел в школьном учебнике Александр Данилович не успел.

В принципе эта идея не нова - впервые её реализовал М. Паш. Процитирую также А. Пуанкаре: "Должны ли мы сохранить классическое определение параллельных линий…? Нет, ибо это определение отрицательное, оно не может быть проверено опытом…Определение это не может быть сохранено ещё и потому, что оно совершенно чуждо понятию о группе, чуждо идее о движении твердых тел, которая…является истинным источником геометрии."

И, наконец, не могу не упомянуть его чисто методические находки. Одно доказательство теоремы о трёх перпендикулярах чего стоит — в одну строчку только из теоремы Пифагора, можно даже без рисунка и сразу в общем виде. Запишем равенство $AX^2=AB^2+BX^2$, в котором A — произвольная точка пространства, лежащая вне данной плоскости, X— произвольная точка фигуры F, лежащей в данной плоскости, B — проекция точки A на данную плоскость, причем B не принадлежит фигуре F. Из этого равенства всё и вытекает, причём для произвольной плоской фигуры. В самом деле, наименьшее значение AX достигается тогда и только тогда, когда достигает наименьшего значения BX, ведь AB — константа, расстояние от точки до данной плоскости. Теперь, если фигура F — прямая, минимальность длин отрезков AX и BX равносильна перпендикулярности их к данной прямой. Вот и всё доказательство. Любопытно заметить, что о самой теореме о трёх перпендикулярах, как таковой, и её «роли» в школьном преподавании Александр Данилович услышал от меня. То, что столь тривиальный факт является чуть ли не главным в школьной стереометрии, очень его удивило.

А вот как доказывал Александр Данилович признак перпендикулярности прямой и плоскости — это доказательство не вошло в его учебники (я привожу его дословно, сохраняя авторский стиль, разве что без рисунка, который легко сделать).

Пусть дана прямая a и на ней точка A. Проведём через прямую a две плоскости β , γ, в них — соответственно - прямые b, c, перпендикулярные a в точке A. Пусть α— проходящая через них плоскость. Возьмём какую-нибудь прямую d, проходящую через точку A и не лежащую в плоскости α . Докажем, что она не перпендикулярна прямой a.

Возьмём на прямой d какую-нибудь точку D, отличную от A. Она лежит в одном из двугранных углов, ограниченных плоскостями β , γ . Проведём через неё прямую так, чтобы она пересекала грани этого двугранного угла в каких-то точках B, C, лежащих с одной стороны от плоскости α .

Возьмём теперь на прямой a с той же стороны от плоскости α точку O. Построим в плоскостях β , γ круги $K_ь$, K_c с общим центром O и радиусом $R = OA$. Так что прямые b, c будут их касательными в точке A. При этом точку O возьмём настолько далеко, т. е. радиус R возьмём настолько большим, чтобы точки B, C оказались в кругах $K_ь$, K_c.

Теперь опишем вокруг точки O шар S тем же радиусом R, Круги $K_ь$, K_c будут его большими кругами, так что точки B, C лежат в шаре S. А так как шар – выпуклая фигура, то и точка D на отрезке BC лежит в нём. Таким образом, на прямой d есть отличная от A точка D, лежащая в шаре S, Значит, прямая d — не касательная к шару и, значит, не перпендикулярна радиусу OA.

Докажем теперь, что всякая прямая, проходящая через точку A в плоскости α, перпендикулярна прямой a.

В самом деле, пусть κ — какая-нибудь такая прямая. Через неё и прямую a проходит плоскость. В этой плоскости через точку A проходит прямая $\kappa' \perp a$. Она лежит в плоскости α , так как иначе, по доказанному, она не перпендикулярна a. Значит, прямая κ' совпадает с κ, так что $\kappa \perp a$.

Такого доказательства признака перпендикулярности прямой и плоскости я не встречал. Можно рассказать его ученикам – так доказывает академик! Главное его достоинство — оно представимо наглядно. На худой конец, можно соответствующим образом помахать руками перед всей аудиторией (в стиле Г. Монжа — он любил излагать геометрию именно так). Ссылка на выпуклость шара в начале курса легко (при необходимости) обходится известным свойством хорды треугольника, выходящей из какой-либо его вершины: она короче хотя бы одной из двух сторон треугольника, выходящих из той же вершины. Другие свойства шара, упомянутые в этом доказательстве, совершенно прозрачны. Да и сам шар не очень-то нужен, достаточно использовать объединение расширяющихся кругов.

Александр Данилович сформулировал этот признак несколько иначе, именно: «Прямые, перпендикулярные прямой в одной её точке, лежат в одной плоскости», и дал такую его переформулировку: «Объединение прямых, перпендикулярных одной прямой в одной её точке, представляет собой плоскость». Он придумал ещё три варианта доказательства этого признака — они аналогичны по идее приведённому. При этом он руководствовался ясной методической идеей: коль скоро в системе аксиом стереометрии уже есть расстояние, то сразу можно говорить о шаре и его свойствах, а затем рассматривать перпендикулярность прямой и плоскости.

Добавлю ещё несколько штрихов. Я как-то спросил у него: «А какими вы видите задачи в учебнике?» — и приготовился записывать: первое, второе, третье... «Очень просто,— последовал ответ. — Помните: «Тиха украинская ночь...»? Вот и задачи должны быть такими».

Ещё об Александре Даниловиче. Вот идёт заседание Ученого методического совета при Министерстве просвещения СССР в бытность его председателем этого Совета. Ему говорят, что в его учебнике не сказано о методах решения задач. Мгновенный ответ: «Геометрия сама по себе есть метод».

Ощущение того, что я слышу, читаю не просто выдающегося специалиста , а хозяина в огромном мире геометрической науки, причём с громадной общей эрудицией, было постоянным во время каждой нашей беседы.

Я помню Александра Даниловича разным, не только учёным, который учил нас понимать геометрию. Вот давняя встреча с ним ещё до совместной работы. 1964 год, Кавказ, альплагерь Алибек, в котором он проводил отпуск, забираясь на прекрасные вершины. Я привёл к нему свою группу школьников-туристов, и с обеда до ужина он рассказывал ребятам про горы, альпинизм и про то, что лучшую свою теорему он доказал в горах, при восходе солнца. Кстати сказать, на Западном Кавказе есть перевал академика Александрова.

Он и в обычной жизни не боялся трудностей, порой идя на конфронтацию с «сильными мира сего».

Помню две его — в то время ректора Ленинградского университета—трёхчасовые лекции для учеников 239-й школы, в которой я тогда работал. Тема — нравственность учёного. Помню его встречи с учителями — он же сам из учительской семьи. На этих встречах он был не только и не столько популяризатором, но и просветителем. Более всего его удручала приниженность учителя в современном мире, причём принятая нами самими, учителями. Его внук, как рассказывал Александр Данилович, однажды спросил у него что-то про симметрию. Разумеется, объяснение было обстоятельным. Но на следующий день внук пришел домой расстроенным: «А учительница сказала, что я всё говорю неправильно».— «То есть как неправильно?» — «Ну, не так, как в учебнике».

Вспоминаются его изречения: «Учить наизусть надо не математические формулировки, а стихи». Ещё: «Математики не считают, считают бухгалтеры». Ещё: «От многих математиков я отличаюсь тем, что знаю, зачем она, эта математика, нужна». Он же был по образованию физик, имел серьёзные работы по теоретической физике. По поводу требовательности к языку, на которой иногда настаивают методисты, приводил в пример строку из песни: «С берёз неслышен, невесом/Слетает жёлтый лист», И спрашивал: «Это кто же слетает —композитор Лист?»

До последних лет своих он удивлял своей памятью — цитировал наизусть многие строчки, в том числе прозу, иногда на иностранном языке. А его стихи, басни...А каким он был полемистом!

Так жалко, что его нет с нами... так жалко...На его могиле – громадная, свободной формы, тёмнокрасная гранитная глыба. И выбита надпись: «Поклоняться только истине…»

* * *

Моё участие в работе над учебником состояло в подборе задач и авторской экспериментальной проверке текста. По этим книгам я проработал во всех классах и массовой, и математической школы. Таким образом, мне довелось побывать «в двух шкурах»: автора и потребителя.

Эта работа дала мне очень много. Довольно быстро я понял, что мысль о том, будто учебник для школы должен делать только учитель, неверна в принципе. Конечно, опытный педагог знает, что и как нужно рассказывать детям, какие задачи с ними надо решать. Но у него же нет такого знания предмета в целом, как у профессионального математика, и, что ещё важнее, у него нет такого уровня понимания предмета.

Приведу по этому поводу пару примеров. Не имеющая принципиального значения теорема о трёх перпендикулярах почитается учителями чуть ли не как главная теорема стереометрии. В ней есть "изюминка", которую я не сразу рассмотрел. Именно, в ней очень просто представлена идея понижения размерности - нахождение расстояния в трёхмерном пространстве сводится к нахождению расстояния в двумерном пространстве. Ясно, что это упрощает ситуацию. Идея понижения размерности встречается и в других местах курса геометрии, например, когда мы в задачах на комбинацию фигур вращения рассматриваем двумерную конфигурацию, полученную в результате проведения осевого сечения.

Пример второй. Известно, что некоторые теоремы стереометрии легче доказываются, если предварительно изучены углы между скрещивающимися прямыми. Однако это понятие «идейно» совсем из другого места в теории, где изучается угол между векторами или направлениями.

Аналогичный пример: перпендикулярность плоскостей может изучаться до двугранного угла, ей предшествует ясный наглядный образ (указанный А.Александровым): перпендикулярная плоскость - это плоскость, покрытая перпендикулярами к данной плоскости .

Точно так же, как правило, не годится в качестве единственного автора школьного учебника и только «чистый математик» или только «специалист по задачам» (названия сугубо условны), никогда не пытавшиеся что-то объяснять детям, скажу грубее, никогда не зарабатывавшие себе этим на хлеб. Первый вряд ли будет озабочен проблемами мотивации учеников и прочими чисто педагогическими проблемами, второму (как и школьному учителю) будет не хватать понимания предмета в целом, но также и методики его преподавания; оба — «чистый математик» и «специалист по задачам» — едва ли знакомы с теорией учебной книги, как таковой. Я приведу характерные примеры из учебников, написанных такими авторами (безусловно и даже абсолютно компетентными в своем деле). Возьму только один раздел курса — векторы. В учебнике геометрии А. Погорелова изложение скалярного произведения начинается с его определения, причём в координатном виде. Зачем нужно такое странное произведение, откуда появляется это сногсшибательное (для ученика) определение — ни слова. В учебниках геометрии И. Шарыгина изложение векторов не сопровождается даже намёком об их роли в физике.Более того, у авторов — «специалистов по задачам» — возможно даже не вполне ясное изложение стандартного теоретического материала. Вот пример из учебника стереометрии И. Шарыгина — определение объёма тела. Цитирую: «Каждому телу можно поставить в соответствие положительное число, которое называется объёмом этого тела. При этом выполняются следующие условия: 1. Объёмы равных тел равны. 2. Если тело разделено на две части, то его объём равен сумме объёмов его частей (свойство аддитивности объема). 3. Если задана единица длины, то объём куба, ребро которого равно этой единице, равен одной кубической единице».

Это определение непросто довести до сознания детей: что такое тело (нет чёткого описания), какие такие равные тела (понятия движения нет), что значит «тело разделено на две части» (произвольные «части» не обязаны иметь объём и что значит «разделено»)? Неясность ещё и в том, что объём считается числом. Если так, то откуда же это число взялось? Видимо, единица измерения объёма уже должна быть. Но почему тогда она появляется только в третьем условии определения? Замечу, что согласно этому определению мы не сможем найти общий объём варенья в двух банках, получающийся у любой хозяйки сложением объёмов в этих банках. А невозможно потому, что две банки порознь (в абстрактном варианте) — это уже не тело. Итак, определение объёма по И. Шарыгину и туманно, и непрактично.

Это проявляется, к примеру, в известной задаче: нас интересует, какую часть составляет объём тетраэдра ACB_1D_1 от объёма всего параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. В учебнике стереометрии И. Шарыгина она предваряет вывод формулы объёма тетраэдра через два противоположных ребра, расстояние и угол между ними. Увы, симпатичное (впрочем, известное) её авторское решение не безупречно, если объём определён так, как в этом учебнике. Поясню, в чём дело. Объём интересующего нас тетраэдра находится не " в лоб" - и не очень понятно, как это сделать. Здесь надо, как говорится, "смотреть рядом". А "рядом" с нашим тетраэдром ещё четыре, которые дополняют данный тетраэдр до исходного параллелепипеда. Объём каждого из "дополнительных" тетраэдров составляет - и это устно - 1/6 от объёма параллелепипеда. Тогда объём всех четырёх таких тетраэдров составляет 2/3 от объёма параллелепипеда, а потому интересующий нас объём составляет 1/3 от объёма параллелепипеда. И. Шарыгин этот результат почти никак не поясняет. Но в чём же заковыка? А в том, что складываются объёмы четырёх тетраэдров, каждые два из которых имеют общее ребро. На каких свойствах объёма основываемся при этом сложении? Не ясно, в нужном месте написано лукавое "значит" .

И уж если авторы с такой высокой репутацией допускают отклонения от математики или методики, то что говорить о других?

Вывод напрашивается: создание учебника по математике целесообразнее рассматривать как задачу для коллективного решения, которую лучше делать командой — математик + учитель + методист. Разумеется, возможно соединение каких-то амплуа в одном лице. При этом необходимо быть в курсе всего добытого по этой проблеме на сей момент в педагогике, дидактике, психологии, методике. Важно точно ощущать веяния времени. И, как говорил А. Александров, литературный талант тоже не помешает.

Довольно быстро после начала преподавания по экспериментальному учебнику становится ясно, насколько первый его вариант далёк от приемлемого. При подготовке к урокам приходилось тексты отдельных параграфов чуть ли не переделывать заново, задачи оказывались неуклюжими и плохо подходящими к теории. Сразу стала ясна причина педагогического успеха А. Киселёва — до того как его книга официально стала учебником, он работал над ней 45 лет. Впрочем, даже при этом система задач в его учебнике не была столь же признана, сколь теория-— понадобился задачник Н. Рыбкина, а затем и П. Стратилатова.

Мне странно слышать нынешний призыв «Назад к Киселёву!», идущий от известных учёных-математиков, но не только от них. Призыв этот порождён туманностью ситуации, в которой оказалась нынешняя школьная геометрия, и всплеском их собственных детских воспоминаний. Да, школьная геометрия по содержанию не шибко изменилась с «киселёвской» поры, но математики, судя по этому призыву, этим и ограничиваются. А то, что изменилась образовательная парадигма, что многое по-новому осмыслено в педагогике, дидактике, когнитивной психологии и методике преподавания,— так это ими в учёт не берётся. И коли свершится их пожелание — как раз и получится «назад».

Идея возврата к преподаванию по А. Киселёву косвенно связана с мифом о "золотом веке" в нашем математическом образовании , который будто бы был. Сейчас, якобы, всё ужасно, мы давно уже не в лидерах и по части школьной математики, но можно повернуть колесо вспять и начать этот поворот следует возвратом к учебникам А. Киселёва. Эта точка зрения не единожды попадалась мне и в печати. Неблагодарное это дело - разрушать мифы, но попробую .

Учебников, написанных А. Киселёвым было несколько: по арифметике, алгебре и геометрии. Я учился по этим книгам и преподавал по ним. Арифметики как отдельного предмета сейчас нет в школе; учебник по алгебре использовать в современной школе невозможно хотя бы потому, что он безнадёжно устарел - в нём нет общепринятой теперь функциональной линии. Добавлю ещё, что этот учебник был явно не "в ходу". Мой учитель математики - заслуженный учитель Владимир Васильевич Бакрылов - его полностью игнорировал, и мы занимались алгеброй по записям в тетрадке. Так что речь может идти только о возврате к учебнику геометрии.

Учебник этот является компиляцией из французских учебников, в чём несложно убедиться. Эта компиляция естественна - ведь А. Киселёв был школьным учителем, а не профессиональным математиком и тем паче - не геометром. Как в любой компиляции, оригинальных методических идей в этом учебнике не видно. Более того, в нём легко обнаружить много неясных и даже неудачных мест, наличие неоправданных лакун в доказательствах; некоторых фактов явно не хватает . О научном уровне учебника можно судить хотя бы по принятому в нём изложению теории объёма . Вот определение объёма : " Величина части пространства, занимаемого геометрическим телом, называется объёмом этого тела. " Что такое "геометрическое тело" - не поясняется. Что такое "часть пространства, занимаемая геометрическим телом" и вовсе неясно. Ответа на простой вопрос: можно ли складывать объёмы двух шаров, не имеющих общих точек, в учебнике не существует. Свойства объёма перечисляются, в том числе такое :"Равные тела имеют равные объёмы" . Но что такое "равные тела" - об этом не говорится. Тем самым вместо определения получается набор слов, который мы выучивали наизусть, ничуть не вдумываясь в его смысл - хотя в старших классах и пора бы. Но "что дозволено ученику, не дозволено учителю" - когда начинаешь преподавать, становится не по себе от трансляции бессмыслицы.

Методика изложения многих разделов в этом учебнике представляет только исторический интерес - как, к примеру, вывод формулы объёма шара без интегрирования.

Замечу, что я не никогда не слышал славословия в адрес этого учебника от гуманитариев.

Я вовсе не утверждаю, что этот учебник был плох в те времена, когда создавался. Но его долголетие является не подтверждением методического совершенства, как об этом часто говорят и пишут, а наводит на мысль о социальной обусловленности феномена. В частности, можно вспомнить постановление 1933 года, действовавшее лет 20, согласно которому в школе должен быть по каждому предмету единственный учебник.

Удивительно для меня не долголетие учебника геометрии, а современный призыв к нему вернуться. На чём он основан? Вот как аргументируют его И. Костенко и Н. Захарова (в своих статьях и в "Учительской газете", и в " Математике в школе") : "Все учебники, изготовлявшиеся последние сорок лет, неудачны. Этот общепризнанный факт доказывает неразрешимость задачи создания качественного учебника в современных условиях." А раз все учебники были неудачны, то вся затея написания новых учебников безнадёжна. Значит, надо вернуться к учебнику А. Киселева. Такой вот ход мыслей .

Странный ход. Первое - утверждение о не качественных нынешних учебниках геометрии. А почему такая хула на те из них, в авторских коллективах которых выдающиеся ученые - геометры: А. Александров, А. Погорелов, Э. Позняк, В. Болтянский ? Эти учебники могут кому-то нравиться или не нравиться, но как же можно отказывать им в качестве? Второе - заявление о безнадёжности попыток написания хорошего учебника. Странно это - качественные учебники по другим предметам у нас, насколько я знаю, есть; в других странах не слышится жалоб на то, что абсолютно все учебники по математике плохие. С какой стати "катить бочку" именно на русские учебники математики?

Я смотрю на свои книжные полки. Вот они - учебники для школы, написанные в прошлом веке нашими крупнейшими учёными (иногда в соавторстве). А. Колмогоров, П. Александров, С.Никольский, А. Погорелов, А. Александров, Л. Люстерник, Д. Фаддеев, В. Гончаров,
Н. Глаголев, В. Болтянский, Э. Позняк, А. Маркушевич, Н. Виленкин ,…. физик Я. Зельдович. Многие из этих книг я знаю на деле - или работал по ним, или частично использовал. Почему они не все оказались в школе - другой вопрос. Однако несомненна их математическая добротность и оригинальность. Я бы даже сказал, что они бесценны, как бы нам не забыть о них, а ещё лучше - сверять по ним наши новые методические устремления.

Далее. Идея возврата к А. Киселёву предполагает, что в школе должен быть один - единственный и притом хороший учебник математики.(Слова "хороший" я побаиваюсь в применению к учебнику - что хорошо для одних - плохо для других.) Думаю, что появление учебника, который устраивал бы всех учителей математики, всех учеников и всех родителей невозможно в принципе - об этом и говорит как раз мировой опыт преподавания. Будем говорить "качественный".) Однако идея единственного учебника порочна - нет возможности выбора, тебя засовывают в прокрустово ложе одной - единственной точки зрения (педагогической, дидактической, методической) конкретного человека - автора учебника. И, наконец, даже если согласиться с идеей единственного учебника - а как же он появится ? Заказать его кому - то? И кому же? И кто будет его выбирать?

В общем, как ни крути - верти, мысль о единственном качественном учебнике геометрии и притом именно А. Киселёва может придти в голову только с отчаяния.

С другой стороны, я понял, насколько легче критиковать учебники, чем принимать участие в их создании. Возникает уйма проблем даже с задачами, и все вместе они порождают главную проблему — их отбора. Вот ведь сколько задач придумало человечество, и наивно надеяться, что можно хотя бы заметно изменить этот фонд собственным разумением.

Отбор задач для учебника определяется многими *соображениями.* Перечислю некоторые из них.

1. Важное назначение задач учебника — способствовать верному пониманию предмета, в частности раскрыть логику развивающегося знания. В самом деле, изложение теории требует в каком-то смысле совсем другой логики — логики разворачивания готового знания. Проще говоря, когда излагается теория, почти всегда непонятно, почему доказательства именно такие, почему разделы учебника идут именно в таком порядке. Однако ясно, что «добывание» фактов и изложение их далеко не одно и то же. Об этом хорошо сказал А. Гротендик.

Рассказывая детям, как решается та или иная конкретная задача, какие преодолеваются трудности, можно в какой-то степени .заполнить этот традиционный пробел почти любого учебника математики. Приведу один пример подобного решения задачи в тексте учебника. Предварительно замечу, что ученикам известен такой результат: в кубе $ABCBA_1B_1C_1D_1$ плоскость треугольника BC_1D перпендикулярна диагонали A_1C. Итак, задача:

«Какой вид имеют сечения куба, перпендикулярные его диагонали? Какое из них имеет наибольшую площадь? Чему она равна в кубе с ребром 1?»

Решение. Такие сечения мы уже знаем. Одно из них — плоскостью BDC_1. Все остальные будут ему параллельны (?). (Знак вопроса, помещённый в скобках в тексте решения задачи, означает, что ученик должен сам обосновать предшествующую этому знаку мысль.) Разберёмся сначала с формой этих сечений. Для удобства будем считать, что переменное сечение движется параллельно себе по направлению от вершины C к вершине A_1 (рис. 99)

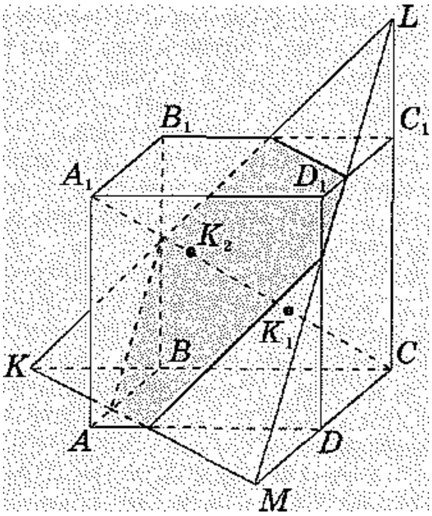

Рис. 99

Пусть точка K_1 — точка пересечения диагонали A_1C с плоскостью BDC_1. Пересекая отрезок K_1C внутри его, переменное сечение будет треугольником (?). Сразу же заметим, что треугольник в сечении будет получаться ещё на одном участке диагонали — от точки K_2 — точки пересечения диагонали A_1C с плоскостью B_1D_1A —до точки A_1. На участке K_1K_2 сечение можно легко нарисовать. Лёгкость — в силу теоремы о том, что две параллельные плоскости пересекаются третьей по параллельным прямым. Видно, что на этом участке сечение является шестиугольником.

(Любопытный получился шестиугольник! У него все углы равны (?) и стороны, идущие через одну, равны между собой (?). Изучение свойств такого шестиугольника — прекрасное упражнение в геометрии.)

Однако вернёмся к нашей задаче. Следующий вопрос — о наибольшей площади такого сечения. Прежде чем найти для неё формулу и вычислять её наибольшее значение, попытаемся предсказать результат.

Представьте себе, что вы разглядываете это переменное сечение в направлении диагонали A_1C от A_1 к C. После того как оно пройдёт точку K_2, оно станет, как мы уже знаем, шестиугольником. Некоторое время после прохождения точки K_2 его площадь, похоже, будет какое-то время увеличиваться (?). До каких же пор?

Теперь представьте себе второго наблюдателя, который смотрит в направлении диагонали на переменное сечение, движущееся от C к A_1. В силу симметрии ситуации он также будет видеть сечение, увеличивающееся (?) по площади. Когда эти два сечения встретятся, тогда и получится сечение с наибольшей площадью. Где же произойдёт эта встреча? Из соображений симметрии заключаем, что это произойдёт в середине отрезка K_1K_2.

Эти рассуждения подсказали нам ответ. Теперь перейдём к его обоснованию. Считать площадь шестиугольника произвольной формы не просто. Поэтому сделаем так. Три стороны этого сечения, лежащие в гранях $ABCD$, BB_1C_1C, CC_1D_1D, продолжим до пересечения с прямыми BC, CC_1, CD в точках K, L, M соответственно. (А почему в результате получится треугольник?) Тогда S —площадь шестиугольника - можно найти как разность S_1 — площади треугольника KLM и $3S_2$, где S_2 — площадь каждого малого треугольника в плоскости сечения при вершинах K, L, M. (А почему эти площади равны?) Обозначим $C_1L = x$. Тогда

$$S_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}x^2 \ (\ ?\ )\ ,\ S_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}(1+x)^2 \ (\ ?\ )\ S = \frac{\sqrt{3}}{2}(-2x^2+2x+1)\ .$$

Из свойств полученного квадратного трёхчлена, учитывая, что $0 \le x \le 1$ (?), можно получить ответы на все вопросы к задаче.

2. Управление развитием школьника во многом обеспечивается характером и последовательностью задач, которые он решает. Оно может идти в разных направлениях, и каждому направлению соответствуют специфические задачи.

Развитию *пространственного мышления* соответствуют задачи, решение которых направляется наглядными образами. Большую ценность в этом отношении представляют задачи, в которых решение можно «увидеть». Их стоит предлагать с самого начала курса стереометрии, поступаясь даже тем, что ученики оперируют образами объектов, которые не имеют определений.

Вот такая задача: «Приведите пример двух одинаковых поверхностей в пространстве, которые имеют одну общую точку». Ученики не знают определения поверхности, ни тем более определения одинаковых поверхностей, но это ничуть не мешает им отыскивать такие поверхности. Ясно также, что искомая здесь конфигурация является контрпримером к двум плоскостям. Задача может иметь продолжение. Попросим учеников найти такие две одинаковые поверхности, которые имеют 10 общих точек. Увидят ли они нечто вроде двух соприкасающихся зубцами пил?

Задачи на сечения вначале обычно конструктивны по характеру. Но уже с самых первых уроков стереометрии стоит предлагать и такие: «Какую форму имеет сечение куба, проходящее через его ребро?» Для получения ответа можно мысленно поворачивать плоскость сечения вокруг этого ребра и представлять себе получающуюся фигуру. (В других задачах такого типа плоскость сечения мысленно надвигается на фигуру, оставаясь параллельной самой себе.) Кто-то видит четырёхугольник, а кто-то — квадрат и прямоугольник. Доказать, что это прямоугольник, в начале курса невозможно, но это не страшно сейчас, куда важнее «увидеть».

В начале курса хочется как можно больше развить пространственные представления. Далее, формируя их, следует помнить, что они имеют свойство «закрепощаться». Хорошо известно, что ученики довольно лихо рисуют высоту правильного тетраэдра на основание, но уже с гораздо большим трудом - высоту из вершины основания на боковую грань. А ведь это та же задача! По такой причине почти в каждой задаче, где предлагается выполнить некоторое построение, тут же целесообразно предложить выполнить его в чуть изменившейся ситуации. Вот ещё пример. В параллелепипеде, все грани которого — равные ромбы, предлагается провести высоту на основание не только из одной вершины и даже более того — провести перпендикуляры из вершин основания на плоскости других граней.

Одна из самых ярких задач в этом духе — об отношении объёмов двух тетраэдров, отсечённых двумя плоскостями от трёхгранного угла. Для её решения достаточно просто сделать так, чтобы основания тетраэдров лежали в одной плоскости, образно говоря, «повернуть тетраэдры на другое основание».

Постоянно тренируя детей в этом направлении на каждом уроке, часто устными задачами, можно добиться заметных успехов. Важно решать задачи безо всякого рисунка. Приведу несколько **примеров.**

1. В двух перпендикулярных плоскостях лежат две параллельные прямые. Расстояние от прямой пересечения до одной из них равно *a,* а до другой - *b*. Чему равно расстояние между данными прямыми?
2. Четыре ребра тетраэдра равны 1. Чему равно наибольшее возможное значение его объёма?
3. В правильной треугольной пирамиде все углы при вершине прямые. Боковые рёбра равны 1. Чему равен радиус описанной около неё сферы?
4. В кубе $ABCBA_1B_1C_1D_1$ вершина B_1 проектируется на плоскость A_1CD_1. Где находится её проекция?

Ученики решают такие задачи с напряжением, закрыв глаза, «чтобы ничего не мешало». Удовольствие от верного решения — громадное. А удовольствие учителя от такого зрелища словами не выразить.

Спросил я как-то в начале урока, для разминки, является ли некая линия прямой (или её частью), если её ортогональные проекции на две пересекающиеся плоскости — прямые (или их части).

— Да,— говорит первый ученик и даёт доказательство.— Ясно, что наша линия лежит в каждой плоскости проектирования, а значит, является их пересечением, то есть прямой.

— А это что? — спрашивает вслух второй, глядя на изгиб трубы вдоль стен.

— А ещё проще взять спираль в плоскости, перпендикулярной обеим данным плоскостям,— говорит третий.

И всё это обсуждение прошло безо всяких 100нков.

Большую роль в формировании пространственного мышления играют образы, получающиеся при мысленном механическом движении и в результате всякого рода симметрии.

Как они помогают при решении задачи, хорошо видно на примере вышеприведённой задачи о сечении куба.

А вот ещё одна задача: «Из точки X на плоскость α проведены перпендикуляр XB и две равные наклонные XA и XC. Доказать, что угол AXC меньше угла ABC» (рис. 100, *а)*.

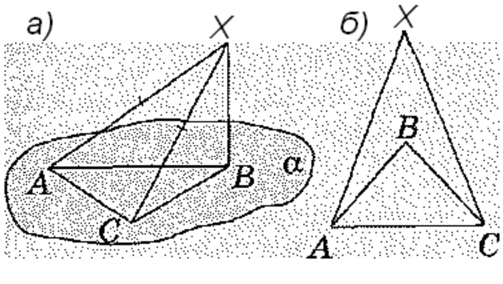

Рис. 100

Обычный путь решения — использование тригонометрических функций (по теореме косинуса или синусов). Но возможно такое доказательство.

Будем вращать треугольник AXC вокруг прямой AC, пока он не окажется в плоскости ABC, причём с той стороны от AC, что и треугольник ABC. Тогда получим такой рисунок (рис. 100, б). Точка X будет дальше от AC, чем точка B, так как $XA>BA$. Угол AXC при таком вращении не меняется, так как не меняются стороны треугольника AXC. Задача свелась к очевидному сравнению углов AXC и ABC на плоскости.

Ещё задача - можно ли вписать сферу в четырёхугольную пирамиду, основанием которой является квадрат и одно из боковых рёбер перпендикулярно основанию?

У этой пирамиды "видна" плоскость симметрии - она проходит через ребро, перпендикулярное основанию и диагональ квадрата. В трёхгранный угол, у которого все углы прямые впишем какую-нибудь маленькую сферу (её центр лежит в плоскости симметрии пирамиды). И начнем её "раздувать", пока она не коснётся одной из оставшихся двух граней. Из симметрии пирамиды ясно, что в этот же момент она коснётся и последней оставшейся грани. Значит, вписанная сфера существует.

Здесь уместно сказать, что пространственное мышление обычно связывают с трёхмерными образами. Это неполно. Решение определённых планиметрических задач также предполагает таковое, и самая впечатляющая его демонстрация — дополнительные построения. Вот **примеры:**

1. В квадрате $ABCD$ со стороной 2 точка K— середина AD, отрезок CL перпендикулярен BK. Чему равен отрезок DL (Рис. 101)

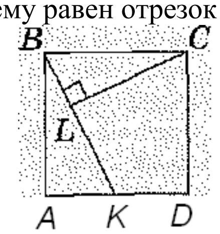

Рис. 99

Ответ можно получить одними только вычислениями, но стоит продолжить BK до пересечения с прямой CD в точке M, как мы увидим прямоугольный треугольник CLM, в котором LD является медианой, проведённой на его гипотенузу, а потому $CM = 2CD$. Значит, $LD = 0{,}5CM=CD$, т.е. $LD = 2$.

2 (очень известная задача). В параллелограмме $ABCD$ точки K и L — середины сторон AD и BC. Доказать, что диагональ AC делится отрезками BK и DL на три равные части (рис. 100).

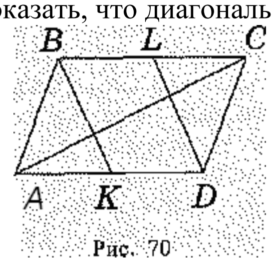

Рис. 100

Дорисуем картинку ещё двумя такими же параллелограммами, и всё становится очевидным настолько, что ничего не хочется объяснять (рис. 101).

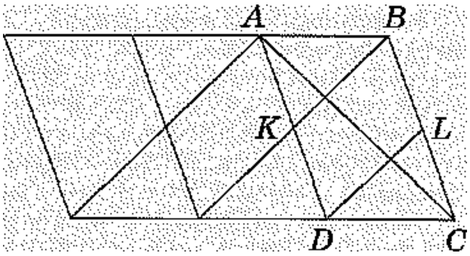

Рис. 101

Ещё одно направление в развитии ученика идет по линии *практического понимания предмета.* Объекты геометрии существуют не только в математической теории, не только в головах людей, но и в реальности (аккуратнее сказать, что прообразы объектов, но здесь такая аккуратность не требуется) . Знание только выигрывает от применения, более того, подавляющее большинство считает, что оно и оправдывается только применением. Задачи этого направления дают простор для изобретательности. Я уже приводил задачу этого направления — требовалось вычислить объём реального тетраэдра, производя измерения только на его поверхности. Приведу ещё несколько **задач.**

1. а) Объяснить, почему стол на трёх ножках устойчивее, чем на четырёх ножках, б) Как проверить, будет ли стол на четырёх ножках устойчив на горизонтальном полу, ничего не измеряя? в) Как объяснить, почему столы делаются на четырёх ножках, хотя они менее устойчивы?

2. На горизонтальной плоскости закреплен крюк. К нему с помощью трёх веревок надо подвесить кольцо так, чтобы его плоскость также была горизонтальной. Как это сделать?

3. В характеристике кристалла важную роль играют углы между его гранями. Эти углы требуется узнать, не проводя измерений на самом кристалле. Предложите для этого какой-нибудь способ, лучше всего идею измерительного прибора.

4. Обычный стол с четырьмя ножками требуется внести из коридора в комнату. Стол находится в другом месте, и, прежде чем дотащить его до дверного проёма, надо что-то измерить. Что именно?

Мне нравится решать с учениками такие задачи. Во-первых, никогда не надо упускать возможность показать, какой может быть реальный толк от геометрии. Во-вторых, есть ученики с ярко выраженным практическим мышлением. На таких задачах они имеют шанс проявить себя в классе. Кроме того, они порой «выдают» такие решения, до которых поди додумайся. Один пример: я как-то предложил на обыкновенном листе бумаги только сгибаниями получить ромб. Известное решение — дважды сгибая, получить середины всех сторон исходного листа, а затем ещё четыре сгиба дадут ромб с вершинами в этих серединах. Но почти сразу, как я сформулировал задачу, семиклассник Саша Т. , вполне обычный троечник по стандартным меркам, тянет руку и показывает, как это можно сделать всего тремя сгибаниями вместо тех шести: согнуть лист по диагонали, а затем загнуть «хвосты». Доказать он сам ничего не смог. Ну и что? Я поставил ему в журнал «пятёрку» с чистой совестью, а потом долго думал: как же учить таких вот пацанов?

Практическими являются задачи учебника типа «как сделать» фигуру с указанными свойствами. «Сделать» — это значит можно использовать любые инструменты, включая измерительную линейку и транспортир. В этом задании возможна и квадратура круга, и трисекция угла (приближённые).

И ещё два слова о задачах практического содержания. Вряд ли их можно придумывать из головы, на то они и практические. К сожалению, мне довелось читать много всякой чепухи под видом таких задач. Ну, например, однажды в задаче речь шла о геологах, которые ночью подошли к горной реке и задумали переправиться через неё. И потребовалась им ширина реки. Как её узнать? Так вот. Ширина для такой переправы абсолютно не существенна, важны глубина и скорость течения реки. Далее, у геологов всегда есть карты, где все эти данные нанесены. И наконец, по ночам в горах не ходят, опасно, и уж тем более не переправляются в темноте через реки. И вообще, как можно проводить ночью какие-либо измерения?

Однако очень непросто находить достойные задачи, причем они, разумеется, должны быть достаточно ясными по смыслу.

Здесь, видимо, уместно сказать несколько слов о терминологии, ибо в какой-то момент я начал путаться в прикладных задачах, практических задачах, межпредметных связях и политехнизации.

Под прикладной задачей я понимаю такую, где речь идет о процессах и объектах, не имеющих математической природы. Например: о яблоках, которые перекладывают из одной корзины в другую; о машинах, которые едут наперегонки по одной дороге; о бассейнах, которые надо заполнить, о ямах, которые надо выкопать. Главная особенность прикладной задачи, которая делает её содержательной, состоит в том, что в ходе её решения есть внематематическая часть: составление математической модели и интерпретация результата, полученного в этой модели, применительно к условию.

Бывает так, что и составление модели, и интерпретация результата почти незаметны, как в такой задаче: «В корзине было 30 яблок, 20 из них раздали. Сколько яблок осталось в корзине?» Такого рода задач в школьных учебниках много.

Под практической задачей я понимаю прикладную задачу, которая (в общей постановке) взялась из реальной практики, а не из головы составителя — для прикладной задачи вообще последнее возможно. Задача про яблоки в корзине — практическая, а задача про машину, которая едет с одной и той же скоростью достаточно долго, вряд ли.

Если прикладная задача взята из какой-либо науки, то естественно говорить о межпредметных связях. Например, задача о камне, брошенном под углом к горизонту, приведённая в учебнике математики, демонстрирует тем самым связь математики и физики. И наконец, если практическая задача порождена каким-либо техническим процессом или объектом, то можно говорить о политехническом аспекте преподавания математики.

Я позволю себе расширить толкование "практики" в нашем деле. Под практикой можно понимать не только опыт рукотворной деятельности, но также интеллектуальной. И вообще - то, что сопутствует человеческой жизни: наука, искусство, общение. В частности, язык, но тогда и логика, которая так или иначе предшествует любому осмысленному поступку.

Если согласиться с таким толкованием практики, то нормально в курсе математики, к примеру, искать связи с другими науками, обсуждать логику естественного (не математического) языка, находить аналогии между тем, что происходит в процессе математической деятельности и тем, что встречается в обычной жизни…

Один пример. С треугольником, не вылезая за его границы, можно возиться до бесконечности, открывая всё новые его свойства. Но есть геометрические преобразования: движение, аффинные преобразования, проективные, круговые. И нам интересно - что происходит с треугольником в результате разных преобразований. То же и в жизни - мы, чтобы познать человека, рассматриваем его не только статично. Мы как-то на него воздействуем и смотрим, что в результате изменилось, а что сохранилось, то есть ищем инварианты. Например, берём ученика с собой в поход.

Ещё одно направление развития школьника — *повышение качества его математической деятельности.* В частности, повышение его логической культуры. Как это может делаться я уже говорил и ещё скажу позже.

3. В отборе задач естественно опираться на принципы дидактики. Проблема в том, как они фактически реализованы. Исследование этого вопроса на материале любого учебника может составить содержание объёмного труда и носит чересчур уж специальный характер. Поэтому не будем углубляться в этот вопрос.

4. Чрезвычайно важна *взаимосвязь системы задач* в разных направлениях, как-то: задачи — теория, задачи — учитель, задачи — ученик, задачи — среда.

Остановлюсь кратко на отдельных чертах такой взаимосвязи.

Задачи — теория. Разумеется, в задачах должно быть подчёркнуто именно такое понимание предмета, какое заложено в теорию. В данном случае я старался подкрепить и частично развить взгляды А. Александрова, изложенные им в известной статье «О геометрии» (Математика в школе.— 1980.—№ 3).

С другой стороны, в задачах допустимы некоторые вольности, т. е. такие методы решения, которые не вполне обеспечены теорией (при том обязательном условии, что эти отклонения от теоретического стиля выдержаны в общем духе). В задачах нашего учебника стереометрии чуть ли не с самого начала говорится о некоторых видах многогранников, существование которых не доказано в теории: правильном тетраэдре, кубе и т. д. В задачах можно позволить себе более свободные доказательные рассуждения, всякого рода симметрии. Например, **задача:** «Дано n попарно скрещивающихся прямых. Докажите, что существует плоскость, которая пересекает каждую из них» (из учебника для математических школ).

Решение. Через одну из данных прямых проведём плоскость. Пусть найдутся среди оставшихся прямых такие , которые не пересекают проведённую плоскость. Тогда чуть повернём нашу плоскость вокруг прямой, через которую она проведена, так, чтобы получились нужные пересечения. Осталось добиться того, чтобы плоскость пересекала и первоначально взятую прямую. Для этого чуть «пошевелим» эту плоскость так, чтобы прямая уже не лежала в ней, а пересекала её. Этого можно добиться также поворотом нашей плоскости, но уже вокруг другой прямой. При таком «малом шевелении» взаимное расположение плоскости и каждой из остальных прямых не изменится. Задача решена.

Говоря о соотношении теории и задач, часто ссылаются на мысль о том, что в математике примеры важнее правил. Иначе говоря - задачи важнее теории. Эта мысль в практике многих учителей математики сводится к тому, что именно задачам отводится основное учительское внимание. И решаем мы эти тысячи задач, поддерживая себя мыслью, что делаем самое существенное в нашем деле.

Конечно, в математической науке теория в определённом смысле, генетически, вторична по отношению к задачам, ибо она является неким итогом организации добытых результатов, то есть кем-то решённых задач.

Но при обучении науке ведь не всё так, как в науке. Задачи (в узком смысле, с точки зрения овладения предметом изучения) - некое средство для уяснения теории. Постижение мира растущим ребёнком - результат ознакомления в первую очередь с теорией. Объясняет мир теория. Я могу себе представить изучение какого-либо раздела математики вообще без решения задач (так я знакомился в молодые годы, например, с конструктивным анализом, с математической статистикой). Да и книги такие бывают, даже учебники. Но не могу себе представить задачи вне теории - разве что задачи на "сообразительность".

Суть школьной математической дисциплины всё же, как мне думается, в теории. Как бы ни были важны задачи.

Задачи — учитель. Видимо, не очень трудно создать «революционный» учебник. Но кто по нему будет работать? Поэтому при создании нового учебника математики необходимо учитывать традиции преподавания в стране. Менять направление движения можно, но очень медленно — слишком велика инерция. Реформа 1968 года не реализовалась полностью, ибо «колмогоровский» поворот оказался слишком крутым.

Поэтому среди задач обязательно должно быть достаточное число привычных учительскому глазу. Далее. Как мы понимаем, учителя разнятся по своим установкам. Необходимо учитывать и это. И, как я думаю, число задач должно быть с большим избытком, чтобы даже учителю имярек не приедалось одно и то же из года в год. Наконец, система задач должна быть удобной в работе.

Сейчас часто вспоминают о «золотых» временах в среднем математическом образовании, о конце 50-х и 60-х годов. Я и учился в эти времена, и поработал немного. Пожалуй, в чём – то так и было, как об этом вспоминают. Главное - учитель точно знал, какой вид задач основной. И не только знал, как учить их решать, но и сам умел решать эти задачи. Основных видов учебных задач, я полагаю, было четыре:

1. арифметические задачи, решаемые по вопросам;
2. геометрические задачи на построение циркулем и линейкой, обязательно с анализом

(«Предположим, что задача решена» – так начиналась работа с задачей) и исследованием;

3. геометрические задачи на вычисление с применением тригонометрии;
4. тождественные преобразования алгебраических выражений.

Этим задачам учили долго, не торопясь. Такие задачи обязательно включались в ежегодные экзамены.

Если вернуться к нынешним временам, то «основной учебной задачей» в геометрии могла бы стать задача на обнаружение связей между геометрическими величинами. Иначе говоря, работа с функциональными зависимостями на геометрическом материале. Здесь и сугубая геометрия, и работа с формулой, и вычисление неизвестных значений, и выведение зависимостей, и решение уравнений, систем и неравенств, и исследование функций, и экстремальные задачи, и вычисление интегралов.

Поговорим поподробнее о математическом образовании в те "золотые " времена. В каком смысле "золотые", что там было такого, что и сейчас было бы неплохо?

Было ли оно по большому счёту хорошим? Ведь не было в школе векторов, основ анализа, начальных понятий теории множеств, элементов логики, исходных понятий о вероятности; не было ни слова об истории математики и математических идей; математика подавалась как сугубо интеллектуальная дисциплина, вне какой - бы то ни было связи с практикой - назвать такое математическое образование "хорошим" можно только при сомнительной аргументации. Что мы и видим - посмотрим на конкретные аргументы уже упомянутых выше И. Костенко и Н. Захаровой. Их три.

1) Предлагается сравнить результаты, полученные сейчас и 50 лет назад на одних и тех же упражнениях. Сравнение для нынешних школьников совершенно безнадёжно.

2) В те давние времена, говорят они далее, школьники в выпускном классе хорошо справлялись с задачей по геометрии с применением тригонометрии, доведённой до числового ответа, полученного с применением таблицы логарифмов. Сейчас такую задачу даже в голову не придёт предлагать старшеклассникам - всё равно не сделают, даже если убрать вычисления с логарифмами.

3) Они приводят довоенный вариант вступительных экзаменов по математике в один из московских вузов и утверждают, что он не по зубам нынешним выпускникам.

Приведённые аргументы не корректны. Тогда, 50 лет назад, обязательное образование не было ни всеобщим средним (за обучение в старших классах надо было даже платить), ни даже "полусредним". Первый отсев учеников проходил после начальной школы - дети с пониженной обучаемостью могли поступать (и поступали) в ФЗУ или РУ - фабрично-заводские или ремесленные училища. Второй отсев происходил после 7-го класса - из него уходили в техникумы. Далее. Тогда и сейчас на обучение умению решать определённого типа задачи тратится разное время. Мне совершенно очевидно, что оно отличается порой на порядок (в десятки раз). К примеру, текстовые задачи тогда решали в курсе арифметики, который преподавался 6 лет. А сейчас даже предмета такого нет. Итак: тогда и сейчас - другие дети и разное время на преподавание определённых разделов курса. А если ещё добавить, что тогда часов на математику было больше, а сейчас " зато " гораздо больше объём учебного материала… Так надо ли удивляться возможным разным результатам в якобы проведённых работах?

Приводя эти аргументы тому, что наше математическое образование покатилось вниз, сводят его, образование, по сути к чему-то другому. Я бы назвал это что-то другое *" вышколенностью" в определённых типовых и технических ситуациях*. (Так как в других ситуациях её добиться невозможно, то будем говорить в одно слово - *вышколенность*.) Именно её и добивались учителя, затратив на это свои силы и таланты. Замечу также - следуя общей логике И. Костенко и Н. Захаровой, несложно доказать,- что ещё лучше обстояли дела с "математическим образованием" (читай - *вышколенностью*) в дореволюционной школе - достаточно только посмотреть, какие там предлагались задачи на выпускном экзамене - я приводил образец тому.

Нас действительно долго и придирчиво натаскивали на всякого рода типовые задачи (в том числе на геометрические "с применением тригонометрии"), длиннющие арифметические

вычисления, многоэтажные тождественные преобразования, знание множества формул (скажем, формулы Мольвейде - кто их сейчас помнит?), невыносимо занудное использование таблиц логарифмов и тригонометрических функций. А головоломные текстовые задачи, решаемые аж в 10 вопросов методами, о которых математики - профессионалы и слыхом не слыхивали, какие - то тройные правила. Зачастую эти задачи были педантично классифицированы - задачи на движение, на работу, на смеси, на проценты (мы так и говорили - решаем задачи на проценты)…чего там ещё было уж и не помню сходу, надо лезть в старые задачники. В решении геометрических задач
"с применением тригонометрии" - они предлагались тогда на выпускном экзамене - мы тренировались весь последний год обучения, старательно приводя полученные в ответе выражения к виду "удобному для логарифмирования".

И всё это тогда называлось математикой. Какое отношение имеют чисто технические эти упражнения и работа в типовых ситуациях к способности мыслить? Разумеется, такие упражнения важны - как гаммы для пианиста, но что бы мы сказали про исполнителя, который сносно играет гаммы и только? Чуть сложнее ситуация с текстовыми задачами. Да, решение задач "по вопросам" заставляет думать, но ведь и составление уравнений с учётом ограничений на величины, используемые в задаче, работает в том же направлении, однако гораздо ближе к подлинной математике.

Но никто тогда, полвека тому, не спрашивал, интересно ли ученикам то, что "проходят" в школе. Никому из учителей не предлагали задуматься о развитии ребёнка. Разумеется, талантливые преподаватели ухитрялись даже малосодержательную или совсем техническую муть сделать интересной.

Хроническая громадная проблема школьного математического образования - рассогласование лозунгов о полезности математики для развития личности и реальной работы учителя, почти сплошь направленной на *вышколенность*. Даже если и нужна такая работа, то только тем, кто в своей будущей работе будет иметь дело с математикой. А требовать её от всех - только детей мучить.

Эта проблема имеет системный характер и у неё нет простых решений. Математика сейчас - элемент общего образования в цивилизованном обществе, к ней надо приобщить (по возможности) всех детей. Но как же это сделать в отведённое время, если так много детей с пониженной обучаемостью и всё растет число детей с отклонениями в психике, если у очень многих отсутствует мотивация и волевые качества ? Да и какая же она - математика "для всех"? Кто бы знал…

А как же насчёт "золотых" времён? И было ли "золото" на самом деле? Всё же было, но только в одном направлении. Учителя четко понимали, чему и как учить, ибо сами в детстве своем были *вышколены*. И никаких тебе реформ.

А в целом школьное математическое образование - "постоянная катастрофа", как выразился Г. Штейнгауз .

Задачи — ученик. Тут хорошо понятные требования. Ученики разные, и в задачах надо постараться учесть их разную обучаемость, разные интересы, разные установки, даже разный тип мышления. Очень трудно было найти некий минимальный уровень трудности. В конце концов, я остановился на том, что этому уровню соответствуют задачи на рисование определённых пространственных конфигураций. Мне довелось работать и с такими учениками, для которых рисование, скажем, правильной четырёхугольной пирамиды, её высоты и апофем было событием. А на другом полюсе — победители международных математических олимпиад. С ними ведь тоже проблема: - задача должна быть интересна для них, но решение её должно быть доступно для понимания остальным ученикам, а потому она не может быть экзотичной.

При составлении задачника необходимо учитывать современные тенденции математического образования, дидактики и педагогики. Поэтому в нашем учебнике планиметрии и оказались стереометрические задачи, задачи исследовательского характера, а также задачи, аналогичные изобретательским. (В последних преодолевается некоторое ограничение на набор возможностей.)

Требуется много усилий и времени, чтобы реализовать в учебнике эти тенденции.

В заключение добавлю, что на подборе задач к учебнику не могут не сказаться и личные вкусы составителя. Я, к примеру, не имею симпатий к вычислительной работе на геометрии. Бывают ситуации, конечно, где её ничем не заменишь, да и учительские пристрастия к таким задачам надо учитывать... Напомню, однако, что в русских дореволюционных задачниках по геометрии таких задач было куда меньше, чем задач на доказательство и построение. А в известной книге Ж. Адамара таковых, по-моему, вообще нет.

Разумеется, задачи в школьном курсе математики — одновременно и цель, и средство. Надо научить решать задачи, надо с помощью задач и теорию прояснить, и ребёнка развить. Задачи как цель нужны весьма немногим — тому, кто будет заниматься математикой или близок к ней. Как средство — всем. Мы явно увлеклись первым направлением и совсем забыли мудрую мысль Ф. Клейна о том, что главное в школьном курсе математики — дать верное общее представление о предмете. Очевидна захламленность курса чрезвычайно частными и весьма специфическими фактами «из жизни чисел, функций и фигур».

Создание учебника геометрии для школы было и до сих пор остаётся очень непростой задачей. В своё время, незадолго до реформы математического образования 1968 года, А. Колмогоров говорил, что если бы существовал где-то написанный и подходящий учебник геометрии, то мы бы его и перевели, не мучаясь сами. Но увы... не нашлось. Анализ учебников геометрии, в разных странах и в разные времена написанных, анализ программ обучения по этому предмету, многочисленных статей математиков, методистов и учителей выявляет, как я уже отмечал, разнообразнейшие и часто полярные точки зрения на роль геометрии в образовании, на содержание курса, его структуру, его основания, роль тех или иных геометрических методов. Такая картина не случайна, она отражает, в частности, сложную и противоречивую природу самого предмета.

Я приведу здесь несколько мыслей А. Александрова, разъясняющих суть дела.

«Геометрия в своей сущности и есть такое соединение живого воображения и строгой логики, в котором они взаимно организуют и направляют друг друга...

Живое воображение скорее ближе искусству, строгая логика — привилегия науки. Они, можно сказать, совершенные противоположности...

В курсе геометрии соединяются ещё две противоположности: абстрактная математическая геометрия и реальная геометрия — пространственные отношения и свойства материальных тел.

...Преподавание геометрии должно включать три тесно связанных, но вместе с тем и противоположных элемента: логику, наглядное представление, применение к реальным вещам. Этот треугольник составляет, можно сказать, душу преподавания геометрии...» (Математика в школе.— 1980.№ 3).

Проблема создания учебника геометрии стала особенно острой в последнюю четверть века. Это связано прежде всего с двумя обстоятельствами: 1) геометрия у нас в стране традиционно является элементом обязательного общего среднего образования; 2) чрезвычайно сильное воздействие на математическое образование в целом оказали известные реформистские, а затем антиреформистские тенденции.

В любом школьном учебнике математики органической частью являются задачи, и при этом не имеет никакого значения, существуют они в одной книге или напечатаны порознь: А. Киселёв и Н. Рыбкин не воспринимаются по отдельности. Задачи, как таковые, исследовали специалисты разных профессий: психологи, дидакты, методисты, кибернетики, системологи, философы, инженеры и, разумеется, математики — тут я мог бы привести десятки фамилий. Далее, задачи для учебника имеют явную специфику по сравнению с каким-либо другим задачником по математике: конкурсным, олимпиадным, тематическим и т. д. Приходится учитывать не только то, что наработано в разнообразных сферах познания о задачах вообще, но и специфический учебный контекст, в котором оказались задачи. В частности, задачи должны соответствовать не только общим требованиям к учебнику и к задачному материалу в нём, но и конкретному теоретическому тексту.

Совокупность требований, которым должны удовлетворять задачи для учебника геометрии, оказывается столь внушительной, сколь и противоречивой. А если попытаться учесть ещё и пожелания учителей — я насчитал их порядка полусотни,— то дело кажется и вовсе безнадёжным. Осмыслить их, как-то упорядочить, выявить приоритеты было очень сложно.

В целом решение громадной методической задачи создания достойного учебника видится мне на путях системного подхода. Его применение в делах педагогических не слишком большая новость, он может многое прояснить не только на этапе проектирования сложного объекта, но и при анализе его функционирования.

Краткая схема использования системных соображений для подбора задач к школьному учебнику геометрии была такова. Надо было понять, что именно влияет на задачи сильнее всего, и было выделено следующее: потребности общества, цели и ценности математического образования, современные дидактические тенденции. Надо было выделить основные связи системы задач. Оказалось, что таковыми являются связи с теоретическим текстом учебника, деятельностью учителя, деятельностью ученика и со средой. Рассмотрев подробнейшим образом эти влияния и связи, надо было сформулировать общие положения для подбора задач, причем учесть специфику как специализированной, так и массовой школы. Исходя из этих положений и следовало создать сначала банк задач, а уже затем распределить из него задачи для конкретных глав, параграфов и пунктов. В результате такой чисто аналитической работы удалось сформулировать понятие «система школьной геометрии», в рамках которого можно отразить значительную часть процесса геометрического образования.

Что дал такой подход конкретно? Удалось увидеть некоторые «дыры» в привычном наборе школьных геометрических задач. В результате появились такие задачи, которых не было или почти не было раньше, например задачи с избыточным числом данных или с недостающими данными, а иногда даже с противоречивыми данными. Ещё пример: обычно в школе решались задачи на построение с помощью циркуля и линейки, очень редко — с использованием других инструментов, но я не встречал таковых, где разрешалось бы подключать и транспортир. И даже вполне традиционные геометрические сюжеты стали выглядеть в ином оформлении, ибо приходилось учитывать возможные различия учеников и учителей, различия в формах организации деятельности всего класса на уроке.

Стало ясно, что сами задачи даже в пределах одного и того же пункта учебника должны быть как-то структурированы. Было проведено очень условное деление задач по сложности: задачи раздела А — полегче, задачи раздела Б — посложнее. Однако этого оказалось недостаточно. Деление задач по сложности чересчур завязано на том, как составитель задачника понимает сам термин «сложность задачи». Общепринятого определения нет; то, что сложно при одном подходе, при другом— элементарное упражнение; наконец, существенно даже то, какие задачи решались перед тем, как появилась эта конкретная. Посему надо было поискать нечто другое. И в дальнейшем появилось деление уже на три раздела: А — задачи «общекультурного уровня», в которых отражены простейшие ситуации, например, нарисовать ту или иную фигуру; Б — задачи «инженерного уровня», связанные в основном с расширением и применением полученных знаний; В — задачи «интеллектуального уровня», связанные с углублением полученных знаний. Уже лучше, но поиск продолжался.

Сейчас дробление совокупности геометрических задач в учебнике геометрии стало достаточно мелким, я предлагаю 17 разделов, озаглавив условно каждый из них.

1. *Разбираемся в решении.*

Идея понятна — надо показать детям не только готовые доказательства, каковые присущи теоретическому курсу, но и то, как они могут получаться. Сюда, естественно, входят элементы эвристического метода в поиске решения задачи.

2. *Дополняем теорию.*

Известно, что для некоторых часто встречающихся на практике ситуаций удобно иметь и такие сведения, которых, как правило, нет в теоретическом тексте. Например, как расположен центр окружности, описанной около равнобедренного треугольника, по отношению к самому треугольнику. На такие сведения, помещённые среди задач, возможны ссылки наравне с теоретическими сведениями.

3. *Смотрим.*

Здесь задачи на развитие пространственных представлений. Ученики должны увидеть в разных ситуациях и положениях ту фигуру, с которой они в данный момент знакомятся, например, вершины правильного тетраэдра среди вершин куба.

4. *Рисуем.*

Опять же развиваем пространственное мышление, но уже в активной форме. Надо сказать, что рисунки могут быть и элементарными, и достаточно трудоёмкими, например: требуется нарисовать фигуру, которая получается в результате вращения куба вокруг его диагонали. Есть ещё одно соображение. Пространственные образы не должны оставаться статичными, для полноценного пространственного мышления необходима их динамика. Этот раздел задач направлен как раз на развитие динамических пространственных представлений.

Известно, что далеко не все ученики имеют пристрастие к качественному рисунку, а некоторые пытаются даже бравировать своей небрежностью. Цитируют нечто вроде: «Геометрия — это способность решать задачи, невзирая на рисунок». Есть одна мелочь — эта идея принадлежит Н. Абелю, а гению можно говорить о своём деле что угодно. Для простых смертных, безнадёжно далёких в своём математическом таланте от Н. Абеля, рисунок — большая помощь, и нелепо от неё отказываться.

К тому же есть определённая графическая культура, которой надо научить. Сколько раз я видел неверное изображение полюсов сферы, причем даже в научных статьях,—не сосчитать. Весьма непросто обосновать изображение конуса вращения — я это как-то делал, и это была неплохая математика. Дело в том, что тут требуется обосновать построение касательной к эллипсу из точки вне эллипса (нарисовать образующие конуса из вершины конуса к его основанию) - какая точка эллипса является точкой касания?.

Наконец, среди учеников попадаются те, для которых сделать красивый рисунок – необходимость. И такое они выдают…Есть детские рисунки геометрических фигур, которые я храню до сих пор, невозможно такое выкинуть в корзину. Порой попадались рисунки с тенями и даже с отмывкой. Такую красоту я не решался компрометировать проверкой самой работы, так и говорил детям: «Такой рисунок не может сопровождаться неверным решением!» А кое – кто увлекался рисованием невозможных фигур в духе треугольника Р. Пенроуза – ну, так это просто творческие работы. К тому же нынешние дети научились рисовать с помощью компьютерных инструментов…

5. *Представляем.*

А здесь нагрузка на пространственное мышление резко возрастает. Более того, решение задачи, приведённой в этом разделе, и ответ в ней возможны на основании только наглядных представлений, без дотошных теоретических обоснований. Слово «очевидно» здесь совершенно уместно, хотя, конечно, и не гарантирует безошибочности. Например, очевидно, что две спирали могут идти на постоянном расстоянии друг от друга. Расшифровка этой фразы достаточно длинна.

6. *Работаем с формулой.*

Важный в практическом отношении момент. Даже если ученики и знают некую формулу, они плохо с ней управляются — не узнают её, если она приведена в других буквенных обозначениях; неверно выражают одну из величин через другие; не связывают её с известными функциональными зависимостями; не чувствуют её в динамике, т. е. при изменении величин, в неё входящих. Особенно все эти ученические недостатки в работе с формулой проявляются при изучении физики. Мой коллега – учитель физики, говорил, что его « главный враг» - буква x. И наш, учителей математики, святой долг - облегчить детям (по возможности) изучение других предметов, в коих востребована математика.

7. *Планируем.*

В подавляющем большинстве вычислительных задач важен не результат, к которому приходит ученик, а тот путь, который приводит к этому результату. И важнее, и интереснее искать именно путь. Само же получение результата после того, как путь уже намечен, можно оставить для самостоятельной работы. Помимо прочего, это экономит и время на уроке. Ученики должны доводить до конца именно типовые расчёты, все прочие — по желанию учителя.

8. *Находим величину*.

Здесь — обычные учебные задачи. Их место в учебном процессе определяется только существующими традициями в преподавании.

Кстати сказать, традиция эта появилась сравнительно недавно. В классических или близких к ним задачниках по геометрии (или книгах, где задач достаточное количество) их или нет, или почти нет. Сошлюсь тут на математиков: Ж. Адамара, Г. Кокстера, Б. Делоне и О. Житомирского, а из более поздних - З. Скопеца, В. Прасолова.

И расцвели эти задачи в лишь в современных школьных учебниках да на вступительных экзаменах. Боюсь, что причины такого расцвета не только вне самой геометрии, но и вне дидактики. И в самом деле, с какой целью нужно вычислять, к примеру, объём придуманной кем-то пирамиды, зачем нужно само число? Ну получили мы это число. И что дальше с ним делать?

Я вижу две причины преобладания таких задач: 1) Их легко проверять. 2) Любому ребёнку можно создать с их помощью иллюзию усвоения теории - чего уж проще, чем подставить нужные величины в нужную формулу? Я вижу три типа осмысленных вычислительных задач. Во-первых, в практической расчётной работе. Предположим нам нужно сделать из планок треугольник с заданным углом, а транспортира нет. Можно ли выйти из положения? Да, для этого воспользуемся теоремой косинуса. Другой важный случай - путем вычислений мы устанавливаем особенности геометрической конфигурации. Например, сравнивания расстояния между некоторыми точками, мы можем судить о расположении двух окружностей, не производя реальных построений. И, наконец, вычисление хоть как-то оправдано, когда найденное число сравнивается с какими-то другими. Например, требуется найти самую длинную хорду в данном многоугольнике.

Близко к этому находятся вычислительные задачи общего вида, когда ищется формула, некая связь между величинами. Что оправдывает поиски такой формулы? Разумеется, теоретическая значимость. Теорема Пифагора тоже сводится к формуле. Далее - богатство следствий из полученной формулы, возможность продуктивно с ней поработать, в том числе получить следствия, не вполне очевидные вначале. Например, мы нашли связь между сторонами и диагоналями параллелограмма. Отсюда легко выводится формула для вычисления медианы треугольника, из последней можно установить особенности треугольника, имея информацию о его медианах и т.д. И, разумеется, формула может быть красива или хотя бы неожиданна сама по себе. Например, известна формула, связывающая между собой для данного треугольника радиусы его описанной окружности R, вписанной окружности r и трех вневписанных окружностей r_1, r_2, r_3:

$4R = r_1 + r_2 + r_3 - r$.

Добавлю сюда ещё получение формулы для того, чтобы показать ученикам разнообразие зависимостей между величинами, их осмысление и решение возможных при этом экстремальных задач. Например, используя теорему Пифагора, можно получить разнообразные иррациональные функции, уравнения, неравенства, системы.

Пожалуй, всё, ничего не упустил. А что сверх этого, я бы сказал, - от дьявола (ну, разумеется, "педагогического"), который сидит во всех нас - учителях, методистах, авторах учебников.

9. *Ищем границы*.

Здесь центр учительской деятельности, именно в этом разделе находятся основные учебные задачи. Раньше таковыми были задачи на построение, затем задачи с применением тригонометрии. Сейчас некая пустота, которую уместно занять задачами на отыскание экстремальных ситуаций, в том числе и экстремальных значений. Эти задачи достаточно разнообразны, позволяют сочетать разные математические умения (работа с функцией, решение уравнений и неравенств, тригонометрия), легко варьируется объём работы.

10. *Доказываем*.

Сюда я отношу задачи теоретического характера. Слежу за тем, чтобы не попали задачи с запутанными формулировками. Утверждение должно быть ясным, текст задачи — коротким, а вот сама она...

11. *Исследуем*.

Сюда отнесём те задачи, в условии которых или в возможном результате есть некая неопределённость, незавершённость, даже неоднозначность. Вплоть до отсутствия решения. Это вовсе не значит, что таковая задача трудна — вовсе нет.

Сошлюсь на А.Пуанкаре, мнение которого приводит В.Арнольд: «по – настоящему интересные проблемы не допускают ни столь точной формулировки (тут ссылка на теорему Ферма – В.Р.) , ни однозначного «да – нет» ответа.»

12. *Занимательная геометрия*.

В этом разделе задачи занимательные, исторические и вообще с определённой «непрямой» спецификой. Я отнёс бы сюда многие задачи на построение как с циркулем и линейкой, так и при другом наборе инструментов.

13. *Прикладная геометрия*.

Тут всё ясно. Теория — теорией, задачи — задачами, а вот как узнать — спелый арбуз или нет, не разрезая его? Может ли тут помочь геометрия? Оказывается, может, если учесть, что спелый арбуз не тонет в воде, а неспелый – тонет.

Надо только добавить, что наряду с практическими задачами (возникшими из реальной практики) здесь находятся задачи, содержание которых внематематическое. Их ещё требуется перевести на математический язык. Такие задачи могут иметь чисто дидактический характер и не обязательно отражать реальную практическую деятельность.

14. *Поступаем в вуз*.

Этот чрезвычайно специфический раздел может быть и в стереометрической, и в планиметрической части курса, т. е. даже в 7—9 классах. Сейчас к названию этого раздела можно добавить «участвуем в ЕГЭ»

15. *Участвуем в олимпиаде.*

Содержание раздела ясно из названия.

16. *Рассуждаем*.

Задачи на чистую логику. Подведение объекта под понятие, построение примеров и контрпримеров, формулировка обратных утверждений, необходимость и достаточность и т. д.

17. *Используем компьютер.*

Этот раздел - отклик на появление достойных компьютерных инструментов для решения геометрических задач.

Благодаря такому разбиению задач учитель геометрии получает возможность более тонкой дифференцировки своей преподавательской деятельности.

К сожалению, иногда трудно добиться тематической чистоты задачи в полном соответствии с разделом, куда она определена, но, видимо, это неизбежно. Возможно появление и других рубрик.

И стало понятно, что впереди ещё очень много работы, и опять вспоминается 45 лет работы А. Киселёва.