

Решения физбоя 2011г. 10 классы.

- 1) Как известно, петух и индюк геометрически подобны (все их линейные размеры отличаются в 2 раза). Пренебрегая внутренней структурой животных сравните времена, за которые прожариваются обе птицы.

В этой задаче невозможно дать определённый ответ. Это вызвано тем, что при прожаривании птиц задействованы два неизвестных коэффициента. Первый отвечает за скорость передачи тепла от окружающей среды к птице, а второй за теплоперенос внутри животного. В зависимости от соотношения коэффициентов ответ может лежать в диапазоне от 2 до 4.

Если второй коэффициент много больше первого, то внутренность птицы в любой момент можно считать равномерно нагретой. Тогда при равных температурах птиц мощности, поглощаемые ими из среды, отличаются в 4 раза, так как площадь индюка в 4 раза больше. А так как масса индюка в 8 раз больше, чем у курицы, и их теплоёмкости можно считать равными, то для прожарки индюка требуется в 8 раз больше тепла, то есть **в 2 раза** больше времени, чем для курицы.

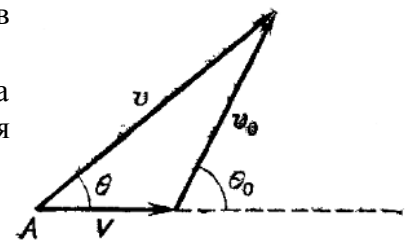
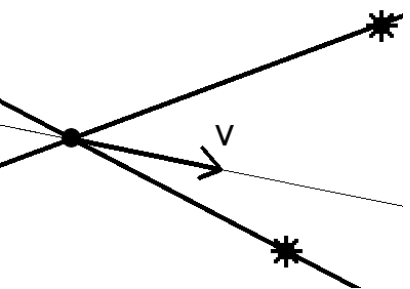
Если же среда активно отдаёт тепло животным то их поверхность практически моментально нагревается до температуры окружающей среды. В таком случае распределение температур во внутренности птиц будет подобным. Мощность теплопереноса между любыми двумя подобными слоями пропорциональна их площади и обратно пропорциональна толщине слоя. То есть мощности при заданной разности температур отличаются в 2 раз. А так как для прожарки индюка требуется в 8 раз больше тепла, то времени потребуется **в 4 раза** больше.

- 2) Космический корабль снабдили пушкой, стреляющей снарядами со скоростями V . Такой снаряд в неподвижном состоянии способен разорваться на два меньших со скоростями v_{01} и v_{02} . Найдите, максимальный угол под которым могут находиться космические корабли противника, чтобы их можно было поразить одним выстрелом.

В силу ЗСИ один из осколков после разрыва должен полететь в направлении, составляющем угол меньший $\pi/2$ с $\vec{V}$. Кроме того осколки обязательно разлетятся в разные стороны относительно прямой, содержащей траекторию снаряда. Отсюда следует, что стрелять необходимо в тот угол, под которым видны корабли противника. Минимальный угол разлёта осколков имеет вершину на нашем корабле. Таким образом нам достаточно посчитать лишь максимальный угол θ_m под которым могут разлететься осколки.

Пусть в СО «снаряд до разрыва» один из осколков полетел со скоростью v , составляющей угол θ_0 с $\vec{V}$. Тогда, как видно из рисунка, в лабораторной СО угол, на который отклонился этот осколок, определяется равенством:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{v_0 \sin \theta_0}{V + v_0 \cos \theta_0}.$$



В силу ЗСИ для второго осколка θ_0 следует заменить на $\pi - \theta_0$. В таком случае угол разлёта осколков можно определить по формуле тангенса суммы:

$$\operatorname{tg}(\theta_1 + \theta_2) = \frac{\operatorname{tg} \theta_1 + \operatorname{tg} \theta_2}{1 - \operatorname{tg} \theta_1 \operatorname{tg} \theta_2} = \frac{(v_1 + v_2) V \sin \theta_0}{V^2 - v_1 v_2 + V(v_1 - v_2) \cos \theta_0}.$$

Найдём экстремум этого выражения. Понятно, что не умаляя общности можно считать, что $v_1 \geq v_2$, а $\theta_0 \in [0; \pi]$. Введём обозначения $t \equiv \cos \theta_0$, $c \equiv \frac{V(v_1 - v_2)}{V^2 - v_1 v_2}$ и

будем искать экстремум равносильного выражения

$$x = \frac{v_1 - v_2}{v_1 + v_2} \frac{\operatorname{tg}(\theta_1 + \theta_2)}{c} = \frac{\sqrt{1 - t^2}}{1 + ct}.$$

При $c < 0$ x может быть равен 0. Тогда угол разлёта будет достигать π . Если же $c > 0$, то приводя к квадратному уравнению и решая его, находим

$$t = \frac{-cx^2 \pm \sqrt{c^2 x^2 + 1 - x^2}}{c^2 x^2 + 1}.$$

Так как $t \in [-1; 1]$, то следует выбрать знак $+$. Отсюда видно, что $x \leq \frac{1}{1 - c^2}$ при

$0 < c < 1$, и x не ограничен в противном случае, при том особым является значение

$$c = 1 = \frac{V(v_1 - v_2)}{V^2 - v_1 v_2} \Rightarrow V = v_1.$$

Заметим, что если $\operatorname{tg} \theta_m = \frac{v_1 + v_2}{v_1 - v_2} \frac{c}{1 - c^2}$, то

$$\sin \theta_m = \sqrt{\frac{\operatorname{tg}^2 \theta_m}{1 + \operatorname{tg}^2 \theta_m}} = \frac{V(v_1 + v_2)}{V^2 + v_1 v_2}.$$

Объединяя рассмотренные случаи и добавляя предельные получим ответ:

$$\theta_m = \begin{cases} \pi, V < v_1 \\ \frac{\pi}{2} - 0, V = v_1 \\ \arcsin \frac{V(v_1 + v_2)}{V^2 + v_1 v_2}, V > v_1 \end{cases}.$$