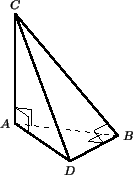
**Задача 1**. Совершенно бесхитростная задача на проценты. Пусть в городе Х живет *х* человек, в городе Y – *y* человек, в психбольницах – *z* человек. Запишем общее количество, проголосовавших за каждую партию. Теперь главное – не раскрывать скобки! Поделим каждое уравнение на общую численность населения в стране и введем новые переменные (*a, b, c*) – доли жителей, голосовавших на разных избирательных участках:

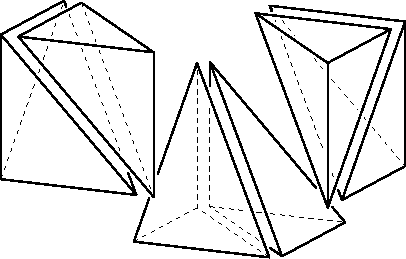
Найдем a, b из последних двух уравнений: вычтем их, домножив первое из них на 5, а второе на 30: , откуда Ну, а теперь найдем долю граждан в психбольницах: 100-32-16=52. Теперь осталось не забыть (!) проверить, что первым двум уравнениями системы эти числа удовлетворяют. Забыть об этом означает, согласиться с утверждением «если по двум последним партиям нет фальсификаций, то и по лидирующим тоже нет».

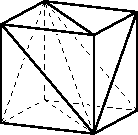
Ответ: 52%

**Задача 2.**

Да, можно.

Возьмём, к примеру, тетраэдр *ABCD*, показанный на рис. В нём *CA* = *AB* = *BD* и  $ \angle$*CAB* = $ \angle$*CAD* = $ \angle$*ABD* =$ \angle$*CBD* = . Возможны несколько способов замощения пространства такими тетраэдрами.

***Решение 1***. Тетраэдр *ABCD* и симметричный ему относительно плоскости *ADC* образуют четырехугольную пирамиду с квадратным основанием, одно из боковых ребер которой перпендикулярно основанию и равно его стороне (рис.). Из трех таких пирамид можно составить куб, как показано на рис. Очевидно, что кубами пространство замостить можно.



***Решение 2***. Рассмотрим правильную четырехугольную пирамиду, образованную центром куба и его гранью. У нее есть четыре плоскости симметрии, разрезающие ее на 8 тетраэдров, подобных *ABCD*. Следовательно, куб можно разрезать на 48 таких тетраэдров.

***Решение 3***. Объединив тетраэдр *ABCD* и симметричный ему относительно плоскости *ABC*, получим тетраэдр, основанием которого является равнобедренный прямоугольный треугольник, а высотой - боковое ребро, проходящее через вершину прямого угла. Из двух таких тетраэдров, симметричных относительно общей боковой грани, составим тетраэдр с равнобедренным прямоугольным треугольником в основании и высотой, падающей в середину гипотенузы. Наконец, из двух таких тетраэдров можно составить тетраэдр, подобный *ABCD*. (Чтобы убедиться в этом, достаточно разрезать *ABCD* по плоскости, проходящей через *A*, *B* и середину *CD*.) Таким образом, из 8 тетраэдров, равных *ABCD*, можно составить подобный им тетраэдр вдвое большего размера. Повторяя этот процесс, получим искомое замощение пространства.

**Задача 3**.

***Решение 1. Скользкое, но простое.***

Докажем, что . Действительно, при равенство очевидно, а при прочих проведем такие преобразования: 



***Решение 2. Функциональное.*** 



Значит, *f(x)* – четная функция, а многочлен является четной функцией тогда и только тогда, когда в его стандартном виде нет слагаемых нечетной степени.

***Решение 3.Элементарное.***









**Задача 4**. ***Решение 1. Примитивное.*** Составим табличку:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | Проголосовали за партию рыцарей | Проголосовали за партию лжецов |
| Количество рыцарей | *a* | *b* |
| Количество лжецов | *c* | *d* |

Тогда партия лжецов набрала , но при участии в exit poll’е указали, что голосовали за партию лжецов. Тогда где - общее число жителей. Тогда, и, значит Тогда общее количество рыцарей , а лжецов , откуда и получаем требуемое.

***Решение 2. Высоконаучное.*** Обозначив через *x*, долю жителей в какой-то из клеток таблицы, запишем:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | Проголосовали за партию рыцарей | Проголосовали за партию лжецов |
| Количество рыцарей | x | 0.5-(0.3-x)=0.2+x |
| Количество лжецов | 0.3-x | 0.7-(0.2+x)=0.5-x |

Теперь осталось доказать, что значения функции заключены в диапазоне [0.25;4] при допустимых значениях переменной *х*, то есть при xϵ[0;0.3]. Нарисуем соответствующую гиперболу и убедимся, что это правда.

**Задача 5.** Да, могло. Пусть в турнире участвовало 13 команд. Назовём одну из команд “особенной”. Пусть “особенная” команда выиграла 5 матчей, а 7 матчей проиграла, и все остальные матчи закончились вничью. Тогда в этом году у “особенной” команды 3 очков, а у других команд, которые выиграли у “особенной”, по очков. Очевидно, команды, проигравшие “особенной”, набирают меньше, чем 14 очков. Таким образом, “особенная” команда занимает в этом году первое место. При использовании в этом году прошлогодней системы подсчёта очков “особенная” команда оказалась бы последней, так как набрала бы , а у других команд, которые проиграли “особенной”, по .

P.S. Всё во власти Василия Павловича!

**Задача 6.**

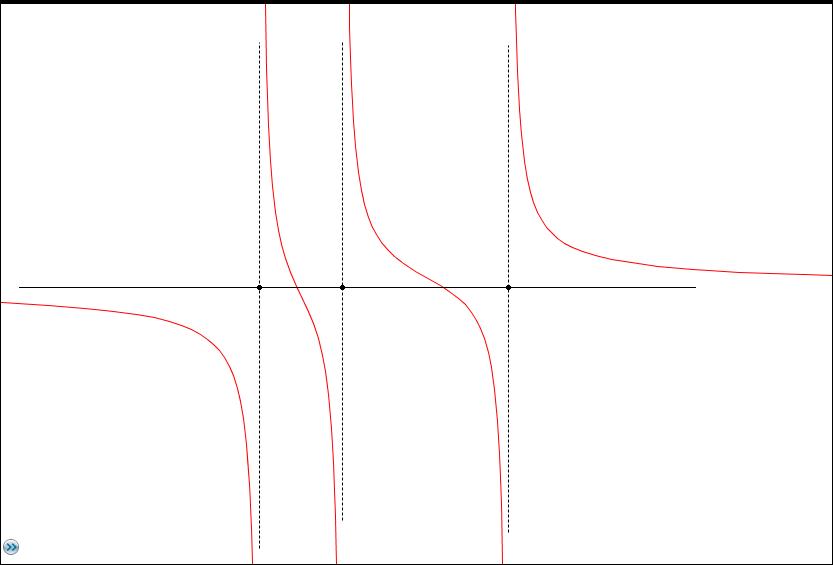
***Решение 1. Функциональное*.** В силу симметричности уравнения относительно , н.у.о. будем считать, что .

Пусть . Заметим, что:

Функция непрерывна; , значит, у функции существует корень на интервале . Аналогично существует корень на интервале . Функция – квадратичная, следовательно корней у нее не больше двух, причем оба этих корня удовлетворяют условию , следовательно у исходного уравнения ровно 2 корня.

***Решение 2. Тривиальное.*** Раскроем скобки в числителе, напишем дискриминант полученного квадратного уравнения, заметим, что его можно представить в виде , поскольку *a,b,c* различны. Осталось проверить, что a,b,c не являются корнями числителя, то есть оба корня числителя удовлетворяют ОДЗ. Кстати, эту проверку удобнее всего делать, когда дроби к общему знаменателю уже приведены, а скобки в числителе еще не раскрыты.

***Решение 3. То же решение 2, но пересказанное на высоконаучный лад.*** Приведем к общему знаменателю, перепишем числитель через элементарные симметрические полиномы: . – это известное неравенство для симметрических полиномов от трех переменных, равенство в нем достигается только при совпадающих a,b,c. Осталось проверить, что a,b,c не являются корнями числителя, то есть оба корня числителя удовлетворяют ОДЗ.

***Решение 4. Графическое.*** Все три слагаемых – функции, убывающие на каждом промежутке своей области определения. Значит, их сумма тоже убывает на каждом промежутке своей области определения. Пределы в каждой точке разрыва равны ±∞, поскольку в каждой точке разрыва одно из трех слагаемых имеет такой предел, а два других конечны. Пределы в ±∞ равны ±0 соответственно. Итак, вид графика понятен (см. рис.).

По графику устанавливаем, что корней 2.

**Задача 7**. ***Решение 1. Упорядоченное.*** Нетрудно заметить, что все возможные решения будут положительны. Из первого уравнения имеем: , то есть . Аналогично и . Отсюда получаем, что необходимое условие . Дальше очевидно. Ответ: .

***Решение 2. Симметричное.*** Домножим все равенства на 2 и сложим: , откуда следует, что. Осталось заметить, что этот набор подходит.

Ответ: 

**Задача 8**. Раз числа х177 и х221 рациональны, то и число х221/х177=х44 рационально, а значит рациональны числа х176=(х44)4 и само число х= х177/х176.

Вопрос. А если известно, что рациональны числа х77 и х121, то можно ли утверждать что число х рационально?

**Задача 9.**

Решение: . Первый переход верен, т. к. высота треугольников общая, – середина , четвертый переход – т. к. делит медианы в отношении 2:1.

.