**XXХ МЕЖДУНАРОДНАЯ НАУЧНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ ШКОЛЬНИКОВ**

**«САХАРОВСКИЕ ЧТЕНИЯ»**

**ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ЛИНЕЙНЫХ КОМБИНАЦИЙ СТЕПЕНЕЙ ТРОЙКИ**

Кондратьев Василий, к.ф.-м.н. Г.М.Головачев

*Академическая гимназия им. Д.К.Фаддеева СПбГУ*

Известно, что если из степеней двойки от 0 до k по очереди выбирать пары чисел и стирать, заменяя их положительной разностью стертых чисел, то, повторяя эти действия, можно получить любое нечетное число от $1$ до $2^{k}-1$. В нашей работе исследуется последовательность чисел, полученных с помощью выполнения аналогичных действий над степенями тройки, то есть последовательность чисел, представимых следующим образом:

$$3^{k}-3^{\left(k-1\right)}\pm 3^{\left(k-2\right)}\pm …\pm 3^{1}\pm 1$$

Исследуемая последовательность $\left\{a\_{n}\right\}$ выглядит так:

$$2\_{1}; 5\_{2} 7\_{3}; 14\_{4 }16\_{5} 20\_{6} 22\_{7}; 41\_{8} 43\_{9} 47\_{10} 49\_{11} 59\_{12 }61\_{13} 65\_{14} 67\_{15};122\_{16 }124\_{17 }128\_{18 }...$$

(индекс каждого числа соответствует его номеру в последовательности).

Эта последовательность не включена в известную в мире Энциклопедию целочисленных последовательностей OEIS.

Последовательность $\left\{a\_{n}\right\}$ можно разбить на наборы, каждый набор – это группа результатов описанных выше действий, совершенных над наборами троек, максимальная степень которых одинакова.

В работе представлен ряд свойств последовательности $\left\{a\_{n}\right\}$:

1. Формулы максимального и минимального результата для степени $k$

$$a\_{k,min}=\frac{1}{2}(3^{k}+1)$$

$$a\_{k,max}=\frac{5}{6}(3^{k}-\frac{3}{5})$$

(Здесь и далее под словом “результат” понимается число, полученное с помощью описанных ранее действий, совершенных над последовательностью троек с той или иной максимальной степенью.)

1. Количество результатов для степени $k$ равно $2^{k-1}$.
2. Верно следующее рекуррентное соотношение: $a\_{k+1,p\pm }=3a\_{k,p}\pm 1$.

Здесь, для удобства, введена двойная индексация $k$ – максимальная степень, $p – $номер элемента среди результатов для $k$-ой степени.

1. Последовательность разностей двух соседних результатов для любой степени тройки имеет вид: $2, 4, 2, 10, 2, 4, 2, 28, 2, 4, 2, …$, то есть получается отражением числа $3^{0}+1$, стоящего на первом месте, относительно числа $3^{1}+1$, стоящего на втором месте, далее уже имеющиеся три члена последовательности (2, 4, 2) отражаются относительно четвертого члена, равного $3^{2}+1$ (получается 2, 4, 2, 10, 2, 4, 2) и так далее. Каждый член последовательности имеет вид: $3^{x}+1$.

(Все свойства доказаны в тексте работы.)

Выведенных свойств оказалось недостаточно для нахождения формулы $n$-ого элемента последовательности $\left\{a\_{n}\right\}$, в связи с чем, помимо последовательности $\left\{a\_{n}\right\}$, была исследована вспомогательная последовательность $\left\{b\_{n}\right\}$, которая выглядит следующим образом: $1, 2, 1, 4, 1, 2, 1, 8, ...$. Эта последовательность аналогична последовательности, описанной в четвертом свойстве, каждый член последовательности $\left\{b\_{n}\right\}$ представим в виде: $2^{x}$. С помощью этой последовательности будет выведена формула $n$-ого члена последовательности разностей двух соседних результатов для определенной степени тройки (см. свойство 4).

Для последовательности $\left\{b\_{n}\right\}$ также был выведен ряд свойств:

1. Каждая степень двойки, при первом своем появлении в последовательности, равняется своему номеру.
2. Номер числа $2^{k} $всегда можно представить в виде $2^{k}+x\*2^{k+1}$($x, k$-целые неотрицательные числа).
3. Максимальная степень двойки, на которую делится номер члена последовательности, - это и есть этот член последовательности.

(Все свойства доказаны в тексте работы.)

Выведенные свойства позволили найти формулу n-ого члена последовательности $\left\{b\_{n}\right\}$: $b\_{n}=НОД\left(2^{n},n\right)$.

Поскольку $log\_{2}НОД\left(2^{n}, n\right)$ - это показатель степени элемента под номером n, то формула $n$-ого члена последовательности, аналогичной $\left\{b\_{n}\right\}$, каждый член которой имеет вид $с^{x}$, выглядит так: $с^{log\_{2}НОД\left(2^{n}, n\right)}$.

Благодаря выведенным свойствам последовательностей $\left\{a\_{n}\right\}$ и $\left\{b\_{n}\right\},$ удалось вывести несколько формул, необходимых для нахождения формулы n-ого члена последовательности $\left\{a\_{n}\right\}$.

1. Формула степени $k$, из которой образован искомый $n$- й элемент:

$k=\left[log\_{2}n\right]+1$.

1. Формула первого (минимального) элемента, полученного из троек с максимальной степенью $k$ : $a\_{k,min}=\frac{1}{2}\left(3^{\left[log\_{2}n\right]+1}+1\right)$
2. Формула разности между минимальным элементом полученным из троек с максимальной степенью $k$ и $n$-ым элементом:

$$a\_{n}-a\_{k,min}=\sum\_{i=1}^{n-2^{\left[log\_{2}n\right]}}\left(3^{log\_{2}\left(НОД\left(2^{i},i\right)\right)}+1\right)$$

для вывода этого выражения и была использована формула $b\_{n}=НОД\left(2^{n},n\right)$.

Выражая $a\_{n}$, получили:

$$a\_{n}=\frac{1}{2}\left(3^{\left[log\_{2}n\right]+1}+1\right)+\sum\_{i=1}^{n-2^{\left[log\_{2}n\right]}}\left(3^{log\_{2}\left(НОД\left(2^{i},i\right)\right)}+1\right)$$

Результаты. Была обнаружена новая последовательность (последовательность, которая не внесена в уже упомянутую энциклопедию OEIS), она была исследована по схеме, принятой в OEIS. Поэтому результаты позволяют рассчитывать на включение исследованной последовательности в OEIS. В процессе исследования был выведен ряд свойств этой последовательности, в том числе выведена формула $n$-ого члена. Также была изучена вспомогательная последовательность, для которой тоже была выведена формула $n$-ого элемента, эта формула позволяет найти $n$-й член не только вспомогательной последовательности, но и любой другой, имеющей уже описанное строение (строение аналогичное строению вспомогательной последовательности).

1. Р.Грэхем, Д.Кнут, О.Паташник. Конкретная математика. Основание информатики. М., Мир, 1998
2. www.oeis.org