**МЕТОД РЕШЕНИЯ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ПЕЛЛЯ**

Орлов Н.В.  
*МАОУ СШ №145, Красноярск, Россия*[nikitanihilanth@mail.ru](mailto:nikitanihilanth@mail.ru)

В настоящей работе рассматривается семейство уравнений общего вида

где и . Они относятся к широкому классу так называемых параметрических уравнений Пелля [1-2]. Известным результатом является то, что параметрические уравнения Пелля могут быть либо неразрешимы, либо имеют бесконечное количество решений , каждое из которых по определённому известному алгоритму строится из наименьшего(-их) решения(-их), называемого(-ых) *базисным(-и)*. Решение подобных уравнений традиционным методом представляет собой сведение их к классическому виду и дальнейшее решение по общепринятому алгоритму решения уравнений Пелля [3-4], включающему анализ разрешимости «сопряжённого» нашему уравнения , однако данный подход является долгим и нерациональным, вследствие чего в настоящей работе нами была поставлена следующая цель: дать оптимальный алгоритм решения уравнений рассматриваемого вида.

Вкратце опишем ключевую идею. Положим . В силу иррациональности каждому решению взаимно однозначно соответствует некоторое число , в частности, базисному решению соответствует . В силу взаимно однозначного соответствия нахождение равносильно нахождению базисного решения. «Базисность» выражается сформулированным нами в ходе решения задачи *условием базисности*: , где – некоторый «поправочный» коэффициент, который мы вольны варьировать, как нам удобно. Как оказывается, компонента базисного решения принадлежит области значений функции на ограниченном интервале, удовлетворяющем условию базисности, описанному выше. Этот фрагмент области значений содержит конечное количество целых чисел – «кандидатов» на роль , вследствие чего становится возможен их полный перебор. Задача свелась к тому, чтобы лишь минимизировать этот перебор – для этого мы подберём такой поправочный коэффициент , чтобы фрагмент области значений оказался как можно меньше, что и было нами проделано. Для нахождения искомого значения были использованы некоторые методы математического анализа.

Результат нашей работы – искомый метод решения уравнения, который можно оформить в виде теоремы:

Если у данного уравнения есть решения, то их бесконечное множество. Пусть и , где – некоторая пара решений (). Тогда , где и описываются следующими условиями: если , то , если же , то или и , или и

Также из найденного алгоритма было получено, что разрешимость уравнения гарантирует существование некоторого специального решения , удовлетворяющего условиям: если , то , если же , то . Существование этих специальных решений было использовано нами при анализе разрешимости уравнений и , который заключался в нахождении условия на параметр , при соблюдении которого искомые уравнения будут неразрешимы при любых значениях . Условие было нами успешно получено. Для первого уравнения оно выполняется для , для второго – для .

**Источники:**

1. <https://en.wikipedia.org/wiki/Pell%27s_equation>
2. T. Andreescu, D. Andrica. *Quadratic diophantine equations*, Springer, New York, 2015.
3. Осипов Н. Н. *Уравнения Пелля в задачах* // Рукопись.
4. Спивак А. Ж*. Квант,* 2002, **4**, 5–11.