**МЕТОД РЕШЕНИЯ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ПЕЛЛЯ**

Орлов Н.В.
*МАОУ СШ №145, Красноярск, Россия*nikitanihilanth@mail.ru

В настоящей работе рассматривается семейство уравнений общего вида

$$x^{2}-mxy+y^{2}=B,$$

где $B\ne 0$ и $m\geq 3$. Они относятся к широкому классу так называемых параметрических уравнений Пелля [1-2]. Известным результатом является то, что параметрические уравнения Пелля могут быть либо неразрешимы, либо имеют бесконечное количество решений $(x\_{k};y\_{k})$, каждое из которых по определённому известному алгоритму строится из наименьшего(-их) решения(-их), называемого(-ых) *базисным(-и)*. Решение подобных уравнений традиционным методом представляет собой сведение их к классическому виду $x^{2}-Ay^{2}=B$ и дальнейшее решение по общепринятому алгоритму решения уравнений Пелля [3-4], включающему анализ разрешимости «сопряжённого» нашему уравнения $x^{2}-Ay^{2}=1$, однако данный подход является долгим и нерациональным, вследствие чего в настоящей работе нами была поставлена следующая цель: дать оптимальный алгоритм решения уравнений рассматриваемого вида.

Вкратце опишем ключевую идею. Положим $ε=\frac{m+\sqrt{m^{2}-4}}{2}$. В силу иррациональности $ε$каждому решению $(x;y)$ взаимно однозначно соответствует некоторое число $α=x-yε$, в частности, базисному решению $(x\_{0};y\_{0})$ соответствует $α\_{0}=x\_{0}-y\_{0}ε$. В силу взаимно однозначного соответствия нахождение $α\_{0}$ равносильно нахождению базисного решения. «Базисность» $α\_{0}$ выражается сформулированным нами в ходе решения задачи *условием базисности*: $q\leq α\_{0}<qε$, где $q>0$ – некоторый «поправочный» коэффициент, который мы вольны варьировать, как нам удобно. Как оказывается, компонента $y\_{0}$ базисного решения принадлежит области значений функции $f\left(α\_{0}\right)=-\frac{ε}{ε^{2}-1}∙α\_{0}+\frac{ε}{ε^{2}-1}∙\frac{B}{α\_{0}}$ на ограниченном интервале, удовлетворяющем условию базисности, описанному выше. Этот фрагмент области значений содержит конечное количество целых чисел – «кандидатов» на роль $y\_{0}$, вследствие чего становится возможен их полный перебор. Задача свелась к тому, чтобы лишь минимизировать этот перебор – для этого мы подберём такой поправочный коэффициент $q$, чтобы фрагмент области значений оказался как можно меньше, что и было нами проделано. Для нахождения искомого значения $q$ были использованы некоторые методы математического анализа.

Результат нашей работы – искомый метод решения уравнения, который можно оформить в виде теоремы:

Если у данного уравнения есть решения, то их бесконечное множество. Пусть $ε=\frac{m+\sqrt{m^{2}-4}}{2}$ и $α\_{k}=x\_{k}-y\_{k}ε$, где $(x\_{k}, y\_{k})$ – некоторая пара решений ($k\in Z$). Тогда $α\_{k}=\pm α\_{0}ε^{k}, α\_{0}=x\_{0}-y\_{0}ε$, где $x\_{0}$ и $y\_{0}$ описываются следующими условиями: если $B>0$, то $-\sqrt{\frac{B}{m+2}}<y\_{0}\leq \sqrt{\frac{B}{m+2}}, x\_{0}=\frac{my\_{0}+\sqrt{y\_{0}^{2}\left(m^{2}-4\right)+4B}}{2}$, если же $B<0$, то или $-\sqrt{\frac{\left|B\right|}{m-2}}<y\_{0}\leq -\sqrt{\frac{4\left|B\right|}{m^{2}-4}}$ и $x\_{0}=x\_{1,2}=\frac{my\_{0}\pm \sqrt{y\_{0}^{2}\left(m^{2}-4\right)+4B}}{2}$, или $y\_{0}=-\sqrt{\frac{\left|B\right|}{m-2}}$ и $x\_{0}=\frac{my\_{0}-\sqrt{y\_{0}^{2}\left(m^{2}-4\right)+4B}}{2}.$

Также из найденного алгоритма было получено, что разрешимость уравнения гарантирует существование некоторого специального решения $(x\_{1};y\_{1})$, удовлетворяющего условиям: если $B>0$, то $0\leq y\_{1}\leq \sqrt{\frac{B}{m+2}}, x\_{1}=\frac{my\_{1}-\sqrt{\left(m^{2}-4\right)y\_{1}^{2}+4B}}{2}, -x\_{1}y\_{1}\leq \frac{B}{m+2}$, если же $B<0$, то $\sqrt{\frac{4\left|B\right|}{m^{2}-4}}\leq y\_{1}\leq \sqrt{\frac{\left|B\right|}{m-2}}, x\_{1}=\frac{my\_{1}-\sqrt{\left(m^{2}-4\right)y\_{1}^{2}-4\left|B\right|}}{2}, \frac{\left|B\right|}{m-2}\leq x\_{1}y\_{1}\leq \frac{2m\left|B\right|}{m^{2}-4}$. Существование этих специальных решений было использовано нами при анализе разрешимости уравнений $x^{2}-mxy+y^{2}=m^{2}+k $и $x^{2}-mxy+y^{2}=-m^{2}-k$, который заключался в нахождении условия на параметр $k$, при соблюдении которого искомые уравнения будут неразрешимы при любых значениях $m$. Условие было нами успешно получено. Для первого уравнения оно выполняется для $k\in \left\{14, 94, 114, 118, 154, 158, 214, 238, 254, 294, 358, 414, 478,…\right\}$, для второго – для $k\in \left\{4, 8, 14, 18, 19, 26, 38, 44, 47, 54, 63, 68, 74, 79, 98, 99,… \right\}$.

**Источники:**

1. <https://en.wikipedia.org/wiki/Pell%27s_equation>
2. T. Andreescu, D. Andrica. *Quadratic diophantine equations*, Springer, New York, 2015.
3. Осипов Н. Н. *Уравнения Пелля в задачах* // Рукопись.
4. Спивак А. Ж*. Квант,* 2002, **4**, 5–11.