**Полиномиальные оценки на количество многогранников, склеиваемых из правильных 3 и 6-угольников**

Дойникова Е.А.

*НЦ ЛНМО, Санкт-Петербург, Россия*

[k.doinikova@yandex.ru](mailto:k.doinikova@yandex.ru)

Цель данной работы — найти оценки на количество пореберных склеек из правильных *k*-угольников при *k* = 3 и *k* = 6. Склейка — это упорядоченная пара из набора многогранников и правила склеивания рёбер. Согласно теореме Александрова о развёртке любая склейка, которая гомеоморфна сфере и угол в любой точке которой не превосходит 2π, соответствует некоторому выпуклому многограннику, причём только одному (при этом допускается, что многогранник вырождается в плоский многоугольник, в этом случае поверхность многогранника определяется как две копии многоугольника, склеенные по соответствующим точкам границы) [1].

Не известно ни одного алгоритма, восстанавливающего многогранник по склейке [7,8]. Подсчёт числа склеек также довольно труден, так как это число может быть экспоненциальным даже для одного многоугольника [4]. Эти задачи решены только для нескольких конкретных случаев [2,5,6]. Случай, когда все склеиваемые многогранники — правильные *k*-угольники и склейки пореберные, полностью изучен для *k* ≥ 7 [3] и для *k* = 5 [2]. Для *k* = 6 найдены некоторые многогранники, включая все возможные дважды накрытые многоугольники, которые могут быть склеены [3], а для *k* = 4 найдены оценки на количество склеек [9].

В данной работе была введена новая система координат на треугольной сетке и изучены её свойства. Также было рассмотрено изображение развертки на сетке и сведён перебор развёрток к перебору рёбер, это позволило дать верхнюю оценку. Для нахождения нижней оценки была построена серия многогранников, которые можно склеить из данного количества правильных 3- или 6-угольников.

Основной результат — верхняя и нижняя оценки на количество склеек, причём обе оценки оказались полиномиальными по *n*, где *n* — максимальное число задействованных правильных 3/6-угольников. Для треугольников верхняя и нижняя оценка равны соответственно *O*(*n*⁶⁰) и *Ω*(*n*²), а для шестиугольников — *O*(*n*²⁴) и *Ω*(*n*²). Также была написана программа, перебирающая всевозможные наборы векторов и проверяющая, можно ли составить из них склейку. С её помощью найдены интересные примеры склеек.

Таким образом, в данной работе было завершено исследование по поиску оценок на количество пореберных склеек из правильных *k*-угольников. Основной путь развития задачи — нахождение более строгих оценок, а также классификация всех возможных многогранников, получаемых из правильных *k*-угольников.

1. A. Alexandrov. *Convex Polyhedra*. Springer-Verlag, Berlin, 2005.

2. E. Arseneva, S. Langerman and B. Zolotov. A complete list of all convex shapes made by gluing regular pentagons. In *XVIII Spanish Meeting on Computational Geometry*, Girona, Spain, 2019.

3. E. Arseneva and S. Langerman. Which Convex Polyhedra Can Be Made by Gluing Regular Hexagons? *Graphs and Combinatorics*, 2019.

4. E. Demaine, M. Demaine, A. Lubiw, and J. O’Rourke. Enumerating foldings and unfoldings between polygons and polytopes. *Graphs and Combinatorics*, 18(1):93–104, 2002.

5. E. Demaine, M. Demaine, A. Lubiw, J. O’Rourke, and I. Pashchenko. Metamorphosis of the cube. In *Proc. SOCG*, pages 409–410. ACM, 1999.

6. E. Demaine and J. O’Rourke. *Geometric folding algorithms*. Cambridge University Press, 2007

7. D. Eppstein, M. J. Bannister, W. E. Devanny, and M. T. Goodrich. The Galois complexity of graph drawing: Why numerical solutions are ubiquitous for force-directed, spectral, and circle packing drawings. In *International Symposium on Graph Drawing*, pages 149–161. Springer, 2014.

8. D. M. Kane, G. N. Price, and E. D. Demaine. A Pseudopolynomial Algorithm for Alexandrov’s Theorem. In *WADS*, pages 435–446. Springer, 2009.

9. S. Langerman, N. Potvin, and B. Zolotov. Enumerating All Convex Polyhedra Glued from Squares in Polynomial Time. 2021.