**О ЗАВИСИМОСТИ ПЛОЩАДИ СЕГМЕНТА ПАРАБОЛЫ ОТ КОЛИЧЕСТВ ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ ТОЧЕК, ЛЕЖАЩИХ ВНУТРИ НЕГО И НА ЕГО ГРАНИЦЕ**

Сергеенко С.В.1, Дегтяренко И.А.2

1Витебский государственный университет имени П.М.Машерова, Витебск, Беларусь

2Государственное учреждение образования "Гимназия №1 г. Витебска имени Ж.И.Алфёрова", Витебск, Беларусь

resaqre@gmail.com

Введение. Введём на плоскости декартову прямоугольную систему координат.

Определение 1. Целочисленными точками будем называть точки на плоскости, координаты которых являются целыми числами.

Формула Пика выражает площадь многоугольника с целочисленными вершинами через количество целочисленных точек внутри него и число таких точек на его границе.

 $S=I+\frac{B}{2}-1,$ (1)

где $S$ — площадь многоугольника, $I$ — количество целочисленных точек внутри него, а $B$ — количество целочисленных точек на его границе.

В [1] приводится формула Пика и её доказательство, а также решается несколько задач с её применением. В [2] излагается другой подход к выводу формулы Пика, а также проводится её обобщение на трёхмерный случай. В [3] даётся альтернативный подход к формулировке и доказательству формулы Пика, а также обсуждается получение её обобщений для пространств произвольной размерности. В [4] изучается вопрос о многочленах, выражающих зависимость количества целочисленных точек, покрываемых заданными многоугольниками и многогранниками, от выбора длины единичного отрезка, а также показана связь таких многочленов с формулой Пика и обсуждается их возможное применение. В указанных работах основное внимание уделено многоугольникам или многогранникам, то есть фигурам ограниченным прямыми и плоскостями. В данной же работе делаются первые шаги по исследованию аналогичных вопросов относительно фигур с криволинейной границей.

Рассмотрим параболу и прямую, которая её пересекает в двух точках. Тогда прямая отсекает от параболы некоторую дугу.

Определение 2. Сегментом параболы будем называть часть плоскости, ограниченную дугой параболы и отрезком прямой, соединяющим её концы.

Определение 3. Вершинами сегмента параболы будем называть концы ограничивающего её отрезка — точки пересечения параболы и прямой.

Цель данной работы — исследование вопроса о числе целочисленных точек на границе и внутри сегмента параболы, вершины которого — целочисленные точки.

Материалы и методы. Исследование носит теоретический характер. Применяются общенаучные и математические методы, включая методы теории чисел.

Результаты и их обсуждение. Было доказано вспомогательно утверждение

Утверждение 1. Пусть $p\_{1}$ , …, $p\_{k}$ — некоторые простые числа, а $s\_{1}$ , …, $s\_{k}$ — некоторые натуральные показатели. Тогда следующие утверждения равносильны:

$\left(p\_{1}^{s\_{1}}⋅…⁡⋅p\_{k}^{s\_{k}}\right)|x^{2}и\left(p\_{1}^{\left[\frac{s\_{1}+1}{2}\right]}⋅…⁡⋅p\_{k}^{\left[\frac{s\_{k}+1}{2}\right]}\right)|x.$

Пусть на плоскости задана декартова прямоугольная система координат $xOy$ . Рассмотрим параболу заданную уравнением

$y=\frac{nx^{2}}{p\_{1}^{s\_{1}}⋅…⁡⋅p\_{k}^{s\_{k}}},$ (2),

где $n\in N,$ $s\_{1}\in N∪\left\{0\right\},$ …, $s\_{k}\in N∪\left\{0\right\}$ , а $p\_{1},$ …, $p\_{k}$ — простые числа, причём $n$ и знаменатель взаимно простые.

Пусть на правой ветви параболы выбраны две целочисленные точки с координатами $\left(x\_{1},y\_{1}\right)$ и $\left(x\_{2},y\_{2}\right)$ . Соединим эти точки отрезком.

Рассмотрим сегмент параболы ограниченный этими отрезком и дугой параболы, заключенной между его концами.

Утверждение 2. Количество целочисленных точек внутри сегмента параболы, заданной уравнением ([2](#17dp8vu)), с вершинами в целочисленных точках $\left(x\_{1},y\_{1}\right)$ и $\left(x\_{2},y\_{2}\right)$ и на его границе определяется формулами

$B=\left(x\_{2}-x\_{1}\right)\left(\frac{НОД\left(x\_{1}+x\_{2},p\_{1}^{s}\cdots p\_{k}^{s}\right)}{p\_{1}^{s\_{1}}⋅…⁡⋅p\_{k}^{s\_{k}}}+\frac{1}{p\_{1}^{\left[\frac{s\_{1}+1}{2}\right]}⋅…⁡⋅p\_{k}^{\left[\frac{s\_{k}+1}{2}\right]}}\right),$

где $НОД\left(u,v\right)$ обозначает наибольший общий делитель чисел $u$ и $v$ ; $B$ — количество целочисленных точек на границе сегмента параболы.

Ограничимся теперь случаем, когда $s\_{1}=…⁡=s\_{k}=0$ . В этом случае уравнение ([2](#17dp8vu)) примет вид

$y=nx^{2}$. (3)

Утверждение 3. Количество целочисленных точек внутри сегмента параболы, заданной уравнением ([3](#1t3h5sf)), с вершинами в целочисленных точках $\left(x\_{1},y\_{1}\right)$ и $\left(x\_{2},y\_{2}\right)$ и на его границе определяется формулами

$I=\frac{n\left(\left(x\_{2}-x\_{1}\right)^{2}-1\right)\left(x\_{2}-x\_{1}\right)}{6}$ (4),

где $I$ — количество целочисленных точек внутри сегмента параболы.

Заключение. Для отдельных случаев введения декартовой прямоугольной системы координат были получены количества целочисленных точек внутри и на границе сегмента параболы. Тем самым были получены новые теоретические результаты, соответствующие поставленной цели. Они могут быть положены в основу дальнейших исследований, направленных на получение аналога формулы Пика для сегмента параболы.

Утверждение 4. Площадь сегмента параболы, заданной уравнением 3.7, ограниченного прямой, соединяющей лежащие на этой параболе точки с абсциссами $x\_{1}$ и $x\_{2}$ определяется равенством$ $

 $S =\frac{n(x\_{2} - x\_{1})^{3}}{6p\_{1}^{s\_{1}}·. . . · p\_{k}^{s\_{k}}}$.

Доказательство. Рассмотрим сумму площадей

$S\_{1} + S + S\_{2}= \frac{n(x2- x1)(x\_{2}^{2}-x\_{1}^{2})}{p\_{1}^{s\_{1}}·. . . ·p\_{k}^{s\_{k}}}$.

Так как площадь $S\_{2}$ определяется как

$S\_{2}= \frac{n\left(x\_{2}- x\_{1}\right)^{2}(x\_{2}+2x\_{1})}{3p\_{1}^{s\_{1}}·. . . ·p\_{k}^{s\_{k}}}$

Тогда площадь сегмента параболы определяется формулой

$S =\frac{n\left(x\_{2}- x\_{1}\right)^{2}\left(x\_{2}+x\_{1}\right)}{2p\_{1}^{s\_{1}}·. . . · p\_{k}^{s\_{k}}}-\frac{n\left(x\_{2}- x\_{1}\right)^{2}\left(x\_{2}+2x\_{1}\right)}{3p\_{1}^{s\_{1}}·. . . ·p\_{k}^{s\_{k}}}= \frac{n\left(x\_{2}-x\_{1}\right)^{2}\left(3\left(x\_{2}+x\_{1}\right)-2\left(x\_{2}+2x\_{1}\right)\right)}{6p\_{1}^{s\_{1}}·. . . · p\_{k}^{s\_{k}}}= \frac{n(x\_{2}-x\_{1})^{3}}{6p\_{1}^{s\_{1}}·. . . · p\_{k}^{s\_{k}}}$

Следствие 1. Площадь сегмента параболы определяется формулой

$S=I+ \frac{nB}{12}$.

Пусть $m$ определяется как

$m= p\_{1}^{s\_{1}}·. . . ·p\_{k}^{s\_{k}}=1.$

Тогда площадь сегмента параболы определяется как

$S=\frac{n(x\_{2}-x\_{1})^{3}}{6}.$

В этом случае количество целочисленных точек внутри сегмента будет определятся как

$I=S-\frac{n\left(x\_{2}-x\_{1}\right)}{6}.$

А количество целочисленных точек на границе будет определятся как

$B=2\left(x\_{2}-x\_{1}\right).$

Тогда площадь сегмента параболы определяется формулой

$S=I+ \frac{nB}{12}$*.*

1. Васильев, Н. Б. Вокруг формулы Пика / Н. Б. Васильев // Квант. — 1974. — № 12. — С. 39—43.

2. Кушниренко, А. Г. Целые точки в многоугольниках и многогранниках / А. Г. Кушниренко // Квант. — 1977. — № 4. — С. 13—20.

3. Мерзон, Г. А. Формула Пика и тающий лед / Г. А. Мерзон // Квант. — 2018. — №9. — С. 36—37.

4. Мерзон, Г. А. Целые точки в многоугольниках и многогранниках / Г. А. Мерзон // Матем. просв. — Сер. 3, Т. 25. — МЦНМО. — М., 2020. — С. 110—122.