**О ЗАВИСИМОСТИ ПЛОЩАДИ СЕГМЕНТА ПАРАБОЛЫ ОТ КОЛИЧЕСТВ ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ ТОЧЕК, ЛЕЖАЩИХ ВНУТРИ НЕГО И НА ЕГО ГРАНИЦЕ**

Сергеенко С.В.1, Дегтяренко И.А.2

1Витебский государственный университет имени П.М.Машерова, Витебск, Беларусь

2Государственное учреждение образования "Гимназия №1 г. Витебска имени Ж.И.Алфёрова", Витебск, Беларусь

[resaqre@gmail.com](mailto:resaqre@gmail.com)

Введение. Введём на плоскости декартову прямоугольную систему координат.

Определение 1. Целочисленными точками будем называть точки на плоскости, координаты которых являются целыми числами.

Формула Пика выражает площадь многоугольника с целочисленными вершинами через количество целочисленных точек внутри него и число таких точек на его границе.

(1)

где — площадь многоугольника, — количество целочисленных точек внутри него, а — количество целочисленных точек на его границе.

В [1] приводится формула Пика и её доказательство, а также решается несколько задач с её применением. В [2] излагается другой подход к выводу формулы Пика, а также проводится её обобщение на трёхмерный случай. В [3] даётся альтернативный подход к формулировке и доказательству формулы Пика, а также обсуждается получение её обобщений для пространств произвольной размерности. В [4] изучается вопрос о многочленах, выражающих зависимость количества целочисленных точек, покрываемых заданными многоугольниками и многогранниками, от выбора длины единичного отрезка, а также показана связь таких многочленов с формулой Пика и обсуждается их возможное применение. В указанных работах основное внимание уделено многоугольникам или многогранникам, то есть фигурам ограниченным прямыми и плоскостями. В данной же работе делаются первые шаги по исследованию аналогичных вопросов относительно фигур с криволинейной границей.

Рассмотрим параболу и прямую, которая её пересекает в двух точках. Тогда прямая отсекает от параболы некоторую дугу.

Определение 2. Сегментом параболы будем называть часть плоскости, ограниченную дугой параболы и отрезком прямой, соединяющим её концы.

Определение 3. Вершинами сегмента параболы будем называть концы ограничивающего её отрезка — точки пересечения параболы и прямой.

Цель данной работы — исследование вопроса о числе целочисленных точек на границе и внутри сегмента параболы, вершины которого — целочисленные точки.

Материалы и методы. Исследование носит теоретический характер. Применяются общенаучные и математические методы, включая методы теории чисел.

Результаты и их обсуждение. Было доказано вспомогательно утверждение

Утверждение 1. Пусть , …, — некоторые простые числа, а , …, — некоторые натуральные показатели. Тогда следующие утверждения равносильны:

Пусть на плоскости задана декартова прямоугольная система координат . Рассмотрим параболу заданную уравнением

(2),

где …, , а …, — простые числа, причём и знаменатель взаимно простые.

Пусть на правой ветви параболы выбраны две целочисленные точки с координатами и . Соединим эти точки отрезком.

Рассмотрим сегмент параболы ограниченный этими отрезком и дугой параболы, заключенной между его концами.

Утверждение 2. Количество целочисленных точек внутри сегмента параболы, заданной уравнением ([2](#17dp8vu)), с вершинами в целочисленных точках и и на его границе определяется формулами

где обозначает наибольший общий делитель чисел и ; — количество целочисленных точек на границе сегмента параболы.

Ограничимся теперь случаем, когда . В этом случае уравнение ([2](#17dp8vu)) примет вид

. (3)

Утверждение 3. Количество целочисленных точек внутри сегмента параболы, заданной уравнением ([3](#1t3h5sf)), с вершинами в целочисленных точках и и на его границе определяется формулами

(4),

где — количество целочисленных точек внутри сегмента параболы.

Заключение. Для отдельных случаев введения декартовой прямоугольной системы координат были получены количества целочисленных точек внутри и на границе сегмента параболы. Тем самым были получены новые теоретические результаты, соответствующие поставленной цели. Они могут быть положены в основу дальнейших исследований, направленных на получение аналога формулы Пика для сегмента параболы.

Утверждение 4. Площадь сегмента параболы, заданной уравнением 3.7, ограниченного прямой, соединяющей лежащие на этой параболе точки с абсциссами и определяется равенством

.

Доказательство. Рассмотрим сумму площадей

.

Так как площадь определяется как

Тогда площадь сегмента параболы определяется формулой

Следствие 1. Площадь сегмента параболы определяется формулой

.

Пусть определяется как

Тогда площадь сегмента параболы определяется как

В этом случае количество целочисленных точек внутри сегмента будет определятся как

А количество целочисленных точек на границе будет определятся как

Тогда площадь сегмента параболы определяется формулой

*.*

1. Васильев, Н. Б. Вокруг формулы Пика / Н. Б. Васильев // Квант. — 1974. — № 12. — С. 39—43.

2. Кушниренко, А. Г. Целые точки в многоугольниках и многогранниках / А. Г. Кушниренко // Квант. — 1977. — № 4. — С. 13—20.

3. Мерзон, Г. А. Формула Пика и тающий лед / Г. А. Мерзон // Квант. — 2018. — №9. — С. 36—37.

4. Мерзон, Г. А. Целые точки в многоугольниках и многогранниках / Г. А. Мерзон // Матем. просв. — Сер. 3, Т. 25. — МЦНМО. — М., 2020. — С. 110—122.