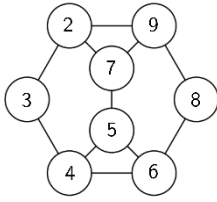


1. Расставьте в кружки на картинке числа от 2 до 9 (без повторений) так, чтобы никакое число не делило бы нацело ни одного из своих соседей.



Ответ: . Возможны и другие картинки.

2. Однажды на дискотеке Аркадий познакомился с Алиной. Но ровно в полночь она убежала домой в свой город. Утром Аркадий решил ее разыскать, но он не успел узнать, где она живет: в городе рыцарей, в городе лжецов или в городе хитрецов (рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут, а хитрецы иногда говорят правду, а иногда лгут). Он встретил представителей каждого из этих городов — Даню, Ваню и Лешу. Каждому из них Аркадий задал по два вопроса: "Кем являешься ты? Кем является Алина?" Даня сказал: «Я не рыцарь. Алина — лжец». Леша: «Я не лжец. Алина — хитрец». Ваня: «Я не хитрец. Алина — рыцарь». Кем же является Алина?

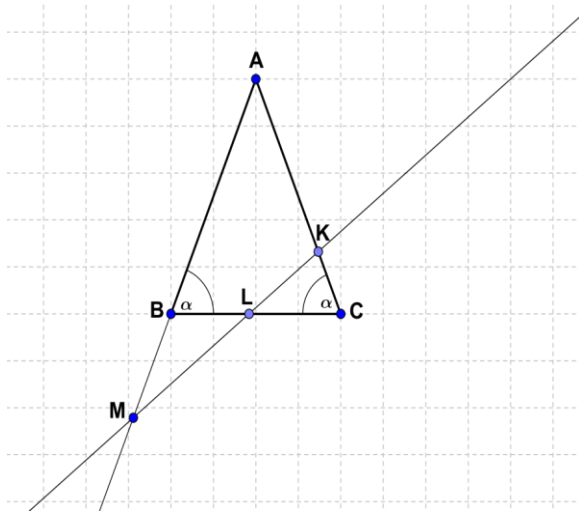
Решение. Заметим, что Даня может быть только хитрецом (Даня не может оказаться рыцарем, иначе он, говоря правду, не сказал бы про себя, что он не рыцарь, не может оказаться и лжецом, так как тогда он сказал бы правду, говоря, что он не рыцарь).

Таким образом, Ваня, утверждая что он не хитрец, сказал правду (хитрец из троих ребят уже найден — это Даня) и является рыцарем. Тогда он сказал правду и про Алину. Значит Алина — рыцарь, а Леша является лжецом.

Проверив остальные фразы, убеждаемся, что такая ситуация возможна.

Ответ: Алина – рыцарь.

3. Прямая пересекает боковую сторону AC , основание BC и продолжение боковой стороны AB равнобедренного треугольника ABC за точку B в точках K , L и M соответственно. При этом треугольники CKL и BML получаются также равнобедренными. Найдите углы треугольника ABC .



Ответ: $72^\circ, 72^\circ, 36^\circ$.

Решение.

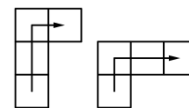
- $\angle ABC = \angle ACB = \alpha$ (как углы при основании равнобедренного треугольника).
- Заметим, что α — острый, иначе сумма углов треугольника ABC больше 180° . Тогда $\angle MBL$ — тупой.
- $\triangle BML$ — равнобедренный по условию и тупоугольный по п.2, значит $\angle BML = \angle BLM = \frac{\alpha}{2}$.
- $\angle KLC = \angle BLM = \frac{\alpha}{2}$ (как вертикальные).
- $\triangle CKL$ — равнобедренный, значит какие-то два его угла равны, при этом $\angle KLC \neq \angle ACB$, так как $\frac{\alpha}{2} \neq \alpha$, так как $\alpha \neq 0$.
- Пусть $\angle KLC = \angle LKC = \frac{\alpha}{2}$. Тогда сумма углов $\triangle CKL$ равна: $\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} + \alpha = 180^\circ$, то есть $2\alpha = 180^\circ$, то есть $\alpha = 90^\circ$. Получили противоречие.
- Значит, остался последний вариант: $\angle ACB = \angle LKC = \alpha$, откуда, $180^\circ = \frac{5\alpha}{2}$, то есть $\alpha = 72^\circ$.

4. На полке в лаборантской ФТШ стояли интересные книги по математике. Юра взял треть всех книг и еще две книги, тогда Леша взял половину оставшихся книг без одной книги, Костя – половину оставшихся к этому моменту и еще одну, а Таня – последние 8 книг. Сколько книг первоначально было на полке?

Решение. Будем решать задачу с конца. $1+9=10$ книг были взяты Костей, а до того, как он взял книги, книг было 18. До того как Леша выбрал книги на полке было $(18-1) \cdot 2=34$ книги. $34+2=36$ книг составляют две трети от всех книг, стоявших на полке в самом начале, откуда $36: \frac{2}{3}=54$ книги первоначально стояло на полке.

Ответ: 54 книги.

5. Шахматный конь хочет попасть из левого нижнего угла в правый верхний угол на доске размером 2017×2018 , делая ходы только вправо и вверх (см. рисунок). Сможет ли он это сделать? Ответ объясните.



Решение 1. Для того, чтобы переместиться из левого нижнего угла доски в правый верхний конь должен пройти 2016 клеток вправо и 2017 клеток вверх. Таким образом, ему надо пройти $2016 + 2017 = 4033$ клетки. Любой из двух разрешенных ходов приближает коня к цели ровно на три клетки. Так как 4033 не делится на 3, то попасть в правую верхнюю клетку конь не сможет.

Решение 2. Пусть x раз шахматный конь продвинется вправо на 2 клетки и вверх на одну, и y раз шахматный конь продвинется вверх на две клетки и вправо на одну. Тогда вправо конь пройдет $2017-1=2016$ клеток или $2x + y$. А вверх конь пройдет $2018-1=2017$ клеток или $2y + x$. Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x + y = 2016 \\ 2y + x = 2017 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 2y = 2 \cdot 2016 \\ 2y + x = 2017 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 2 \cdot 2016 - 2017 \\ 2y + x = 2017 \end{cases}$$

Но эта система не имеет решений, так как, x и y – должны быть натуральное число, а $2 \cdot 2016 - 2017$ не делится нацело на три.

Ответ: не сможет.

6. Числа a , b и c таковы, что выражения $\frac{a+b}{c}$, $\frac{b+c}{a}$ и $\frac{c+a}{b}$ принимают одинаковое значение. Какое это может быть значение (приведите все возможные варианты и докажите, что других нет)?

Решение. Пусть $\frac{a+b}{c} = \frac{b+c}{a} = \frac{c+a}{b} = x$, тогда $a + b = cx$; $b + c = ax$; $c + a = bx$. Сложив полученные равенства почленно, получим: $2(a + b + c) = (a + b + c)x$.

Это равенство может выполняться в двух случаях:

1) если $a + b + c \neq 0$, тогда $x = 2$ (достигается при $a = b = c = 1$);

2) если $a + b + c = 0$, тогда $x = \frac{a+b}{c} = \frac{-c}{c} = -1$ (достигается при $a = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{1}{4}$, $c = -\frac{1}{4}$).

Ответ: -1 или 2.