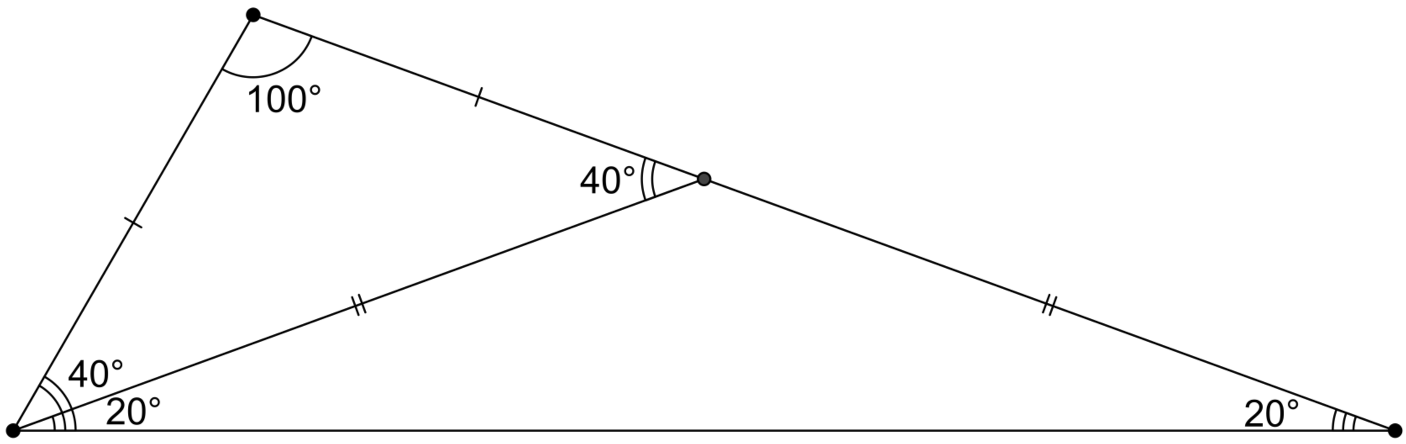
Решения задач вступительной олимпиады. 7 класс. 2018.

1. Два угла треугольника равны $100°$ и $60°$. Покажите, как его разрезать на два равнобедренных треугольника.



2. Ваня, Аркаша, Леша и Даня провели круговой турнир по шахматам (каждый сыграл с каждым по одному разу, победа – 1 очко, ничья – 0,5 очка, поражение – 0 очков). Известно, что четыре партии было сыграно вничью, а Ваня набрал 0,5 очка. Леша сказал, что он за турнир набрал 2,5 очка. Могло ли такое быть?

Предположим, что это возможно. Каждый из участников сыграл по три партии, значит всего было 6 партий, из них четыре закончились ничьей, а две были кем-то выиграны. Если Леша «потерял» только 0,5 очка, значит 2 партии он выиграл, а одну сыграл вничью. Отсюда следует, что больше никто, кроме Леши, побеждать не мог. Если Ваня набрал только 0,5 очка, значит две партии он проиграл, и одну сыграл вничью. Но для того, чтобы проиграть две партии, нужны два выигравших соперника, а выигрывал только Леша. Получаем противоречие, значит такого быть не могло.

Ответ: не могло.

3. Найдите все положительные числа *a* и *b*, которые удовлетворяют системе уравнений:

$$\begin{cases} a^2 - 3ab = -2, \\ 4b^2 - ab = 2. \end{cases}$$

Сложив оба уравнения, получим: $a^2 - 4ab + 4b^2 = 0 \iff (a-2b)^2 = 0 \iff a = 2b$. Подставим во второе уравнение: $4b^2 - 2b^2 = 2 \iff 2b^2 = 2 \iff b^2 = 1$, откуда, учитывая, что *b* – положительное число, получаем, что $b = 1$. Тогда $a = 2$.

Ответ: $\boldsymbol{a = 2, b = 1.}$

4. Между городами A и B 360 км. Из этих городов навстречу друг другу одновременно вышли два поезда. Известно, что после встречи один поезд шел до пункта B еще 2 часа, а другой поезд шел до пункта A еще 4,5 часа. Найдите скорости поездов. (Скорости поездов постоянны на всем маршруте)

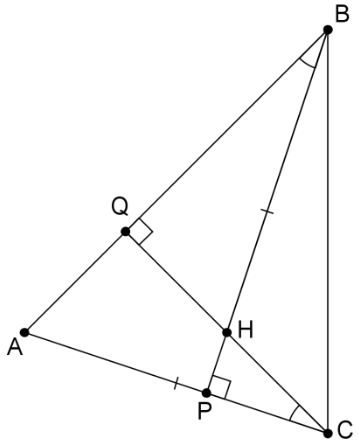
Обозначим место встречи буквой C и предположим, что от начала движения до момента встречи прошло t часов, т.е первому поезду для того, чтобы проехать расстояние AC нужно t часов, а второму – для того, чтобы проехать BC тоже нужно t часов.

Пусть скорости поездов равны v_1 и v_2. Тогда $BC = 2v_1 = tv_2$ и $AC = 4{,}5v_2 = tv_1$, значит

$v_2 : v_1 = 2 : \mathrm{t} = \mathrm{t} : 4{,}5$, откуда $\mathrm{t} = 3$. Один поезд тратит на весь путь $3 + 2 = 5$ часов, а второй – $3 + 4{,}5 = 7{,}5$ часов. Зная путь и время, можно найти скорость: $\mathrm{v}_1 = \frac{360\text{ км}}{5\text{ ч}} = 72\text{ км/ч}$, $\mathrm{v}_2 = \frac{360\text{ км}}{7{,}5\text{ ч}} = 48\text{ км/ч}$.

Ответ: 72 км/ч и 48 км/ч.

5. Высоты BP и CQ остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Оказалось, что $BH = AC$. Найдите угол ABC.



Заметим, что $\angle ACQ = 90° - \angle BAC$ и $\angle PBA = 90° - \angle BAC$, а значит $\angle ACQ = \angle PBA$. Из этого (и из условия) следует, что прямоугольные треугольники ΔACQ и ΔHBQ равны по гипотенузе и острому углу, а значит равны все их соответственные элементы, в частности, катеты CQ и BQ. Но тогда в прямоугольном треугольнике ΔBCQ катеты равны друг другу, т.е. он равнобедренный, значит $\angle QCB = \angle QBC = 45°$.

Ответ: $\angle \boldsymbol{ABC = 45°}$**.**

6. Десятичная запись числа состоит из десяти различных цифр. Цифра называется «хорошей», если она равна сумме двух своих соседей (слева и справа). Какое наибольшее количество «хороших» цифр может быть в таком числе?

Во-первых, хорошая цифра не может стоять ни в начале, ни в конце, так как у нее должно быть два соседа. Во-вторых, хорошая цифра больше каждого из своих соседей, а значит две соседние цифры не могут одновременно быть хорошими. Отсюда: среди первых трех не больше одной красивой, среди последних трех не больше одной красивой, и среди оставшихся в середине четырех – не больше двух красивых. Таким образом, красивых цифр не больше 4. Приведем пример, в котором их 4: 7**8**1**3**2**6**4**9**50.

Ответ: четыре.