9 класс. II тур. Вступительная олимпиада по математике.

1. Валера задумал число и прибавил к этому числу его сумму цифр. Леша также задумал число и тоже прибавил к нему его сумму цифр. В результате сложения у Валеры и Леши получились одинаковые числа. Верно ли, что они задумывали одинаковые числа?

   Ответ: Нет, не верно.

   Решение: Например, Валера задумал 102, а Леша задумал 93:
$$102+1+2=93+9+3=105.$$

2. Решите систему уравнений: $\begin{cases} x^2-4y^2=20, \\ xy+2y^2=20. \end{cases}$

   Ответ: $(\mathbf{6};\mathbf{2}),(-\mathbf{6};-\mathbf{2})$

   Решение: Вычтем из первого уравнения второе: $x^2-xy-6y^2=0 \Leftrightarrow (x-3y)(x+2y)=0$.

   Рассмотрим случай, когда $x-3y=0$: $9y^2-4y^2=20 \Leftrightarrow y^2=4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=2, \\ x=6; \end{cases} \\ \begin{cases} y=-2, \\ x=-6. \end{cases} \end{array}\right.$

   Рассмотрим случай, когда $x+2y=0$: $4y^2-4y^2=20 \Leftrightarrow 0\neq 20$.

   Второе решение: Разложим левые части уравнений на множители: $\begin{cases} (x-2y)(x+2y)=20, \\ y(x+2y)=20. \end{cases}$ Поделим первое уравнение на второе: $\frac{x-2y}{y}=1 \Leftrightarrow x=3y$ (мы имеем право делить, поскольку в правых частях не нули, а значит и множители левых частей не могут быть нулями). Подставим в первое уравнение $3y$ вместо x: $9y^2-4y^2=20 \Leftrightarrow y^2=4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=2, \\ x=6; \end{cases} \\ \begin{cases} y=-2, \\ x=-6. \end{cases} \end{array}\right.$

3. Из горячего крана ванна заполняется за 23 минуты, из холодного - за 17 минут. Маша открыла сначала горячий кран. Через сколько минут она должна открыть холодный, чтобы к моменту наполнения ванны горячей воды налилось в 1,5 раза больше, чем холодной?

   Ответ: Через 7 минут.

   Решение: Пусть в итоге холодной воды будет $2x$ л, тогда горячей – $1{,}5\cdot 2x=3x$ л, а вся ванна – $5x$ л, значит холодная вода будет занимать $\frac{2}{5}$ ванны, а горячая – $\frac{3}{5}$ ванны.

   На то чтобы налить горячую воду нужно $\frac{3}{5}\cdot 23$ мин, а на то, чтобы налить холодную – $\frac{2}{5}\cdot 17$. Таким образом, разница во времени:
$$\frac{3}{5}\cdot 23-\frac{2}{5}\cdot 17=\frac{1}{5}\cdot(69-34)=\frac{1}{5}\cdot 35=7\text{ мин.}$$

4. Дано квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$. Если из произведения корней этого уравнения вычесть их сумму, то получится 2. Если сумму корней этого уравнения поделить на их произведение, то тоже получится 2. Найдите корни этого уравнения.

   Ответ: $-\mathbf{2}\pm\sqrt{\mathbf{6}}$**.**

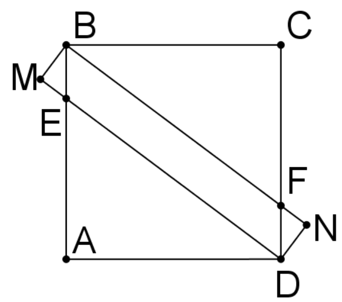
   Решение: Поскольку по условию уравнение квадратное, значит $a\neq 0$. Сумма корней равна $\left(-\frac{b}{a}\right)$, а произведение – $\left(\frac{c}{a}\right)$. Получаем систему: $\begin{cases} \frac{c}{a}+\frac{b}{a}=2, \\ -\frac{b}{a}:\frac{c}{a}=2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b+c=2a, \\ b=-2c. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -c=2a, \\ b=-2c. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{c}{a}=-2, \\ -\frac{b}{a}=4. \end{cases}$ Тогда корни исходного уравнения совпадают, например, с корнями уравнения $x^2+4x-2=0$. С помощью формулы корней квадратного уравнения находим эти корни: $-2\pm\sqrt{6}$.

6. У Маши, Ксюши, Насти и Лизы в совокупности 100 леденцов. У каждых двух девочек не менее 41 леденца. Какое наименьшее количество леденцов может быть у Лизы?

Ответ: 12.

Решение: Предположим, что количество конфет у девочек - a, b, c и d, причем $a \leq b \leq c \leq d$. По условию $\begin{cases} a+b \geq 41, \\ a+c \geq 41, \\ a+d \geq 41. \end{cases}$ Сложим все три неравенства: $3a+b+c+d \geq 123$, но $a+b+c+d=100$, а значит $2a \geq 23$. Поскольку число a – целое, то наименьшее возможное значение $a=12$. Покажем, что при таком a выполняются все условия: пусть у Лизы – 12 конфет, у Насти и Ксюши по 29 конфет, а у Маши – 30 конфет. Всего у девочек $12+29+29+30=100$ леденцов, и у любых двух не меньше 41 леденца.

7. Квадрат $ABCD$ и прямоугольник $MBND$ имеют общую диагональ BD. MD и AB пересекаются в точке E, а BN и CD – в точке F. Площадь $EBFD$ в четыре раза меньше площади квадрата. Найдите отношение площадей квадрата и прямоугольника $MBND$.



Ответ: $\mathbf{25 : 7}$.

Решение: Поскольку квадрат – это частный случай параллелограмма, то из того, что площади параллелограммов $DEBF$ и $DABC$ относятся как $1 : 4$ следует, что $EB : AB = 1 : 4$. Обозначим EB за x, тогда $AE = 4x - x = 3x$. В прямоугольном треугольнике EAD катеты относятся как $3 : 4$, а значит он подобен египетскому, т.е. $ED = 5x$. Треугольники MEB и EAD подобны ($\angle MEB = \angle AED, \angle BME = \angle EAD = 90°$), коэффициент подобия равен $\frac{BE}{ED} = \frac{x}{5x} = 0{,}2$, значит $MB = 0{,}8x$ и $ME = 0{,}6x$. Площадь квадрата равна $(4x)^2 = 16\,x^2$, а площадь прямоугольника $MBND$ равна $0{,}8x(5x + 0{,}6x) = 0{,}8 \cdot 5{,}6x^2$. Отношение площадей:

$$\frac{16x^2}{0{,}8 \cdot 5{,}6x^2} = \frac{25}{7}.$$