7 класс. II тур. Вступительная олимпиада по математике.

1. Костя сложил пять подряд идущих натуральных чисел, затем разделил полученную сумму на сумму следующих за ними пяти натуральных чисел. Могло ли у него получиться число 0,8?

   Ответ: да.

   Решение: Пусть сумма задуманных Костей чисел равна S, тогда сумма следующих пяти чисел равна $S + 5 \cdot 5 = S + 25$. Получаем уравнение $\frac{S}{S+25} = 0{,}8$, откуда $S = 100$. Если Костя задумал числа $n-2, n-1, n, n+1$ и $n+2$, то получается, что $5n = 100$, $n = 20$. Таким образом, Костя задумал числа 18, 19, 20, 21 и 22.

2. Каждая из двух девочек, Таня и Лена, задумала по натуральному числу, возвела его в куб и вычла задуманное ей число. Полученные ими разности оказались одинаковыми. Могло ли так случиться, что Таня и Лена задумали различные числа?

   Ответ: Не могло.

   Решение: Предположим, что Таня задумала число a, а Лена – число b. Тогда $a^3 - a = b^3 - b \Leftrightarrow$

   $$a^3 - b^3 - (a-b) = 0 \Leftrightarrow (a-b)(a^2+ab+b^2) - (a-b) = 0 \Leftrightarrow (a-b)(a^2+ab+b^2-1) = 0$$

   Если девочки задумали два разных натуральных числа, то $a - b \neq 0$ и $a^2+ab+b^2 \geq 3$ (т.к. a и b оба не меньше 1), т.е. $a^2+ab+b^2-1 \neq 0$. Получаем противоречие.

   Второе решение: Предположим, что девочки задумали два различных натуральных числа a и b, причем $a > b \geq 1$. Заметим, что $n^3 - n = n^2(n-1)$.

   Из неравенства $a > b \geq 1$ следует, что $a^2 > b^2 \geq 1$ и $a - 1 > b - 1 \geq 0$. Отсюда $a^2(a-1) > b^2(b-1)$, т.е. одинаковые результаты получиться не могли.

3. У Маши, Ксюши, Насти и Лизы вместе 100 леденцов. У каждых двух девочек не менее 41 леденца. Какое наибольшее количество леденцов может быть у Лизы?

   Ответ: 38.

   Решение: Предположим, что количество конфет у девочек - a, b, c и d, причем $a \leq b \leq c \leq d$. По условию $a + b \geq 41$, а значит $b \geq 21$ (если $a \leq b < 21$, то $a + b \leq 20 + 20 = 40$). Тогда $c \geq b \geq 21$ и $a + b + c \geq 41 + 21 = 62$, а значит $d \leq 100 - 62 = 38$. Покажем, что у Лизы могло быть 38 леденцов: пусть у Лизы – 38 леденцов, у Насти и у Ксюши по 21 леденцу, и у Маши – 20 леденцов. $21 + 20 = 41$, $21 + 21 > 41$, $38 + 20 > 41$, $38 + 21 > 41$. $20 + 21 + 21 + 38 = 100$. Все условия выполнены.

   Второе решение: Если у двух каких-то девочек не меньше 41 леденца, то у двух оставшихся не больше чем 59 леденцов. Предположим, что количество конфет у Маши, Ксюши и Насти - a, b, c, а у Лизы – d. Тогда: $\begin{cases} a + d \leq 59, \\ b + d \leq 59, \\ c + d \leq 59. \end{cases}$ Сложим эти три неравенства: $a + b + c + d + 2d \leq 177$.

   По условию $a + b + c + d = 100$, значит $2d \leq 77 \Rightarrow d \leq 38{,}5$. С учетом того, что леденцов не может быть нецелое число, максимальное количество леденцов у Лизы – 38. Этот пример реализуется, если еще у двух девочек по 21 леденцу, и у последней – 20 леденцов.

4. Докажите, что число $\left(\frac{2019^2+2021^2}{2}\right)^2$ можно представить в виде суммы квадратов двух натуральных чисел.

Доказательство:

$$\left(\frac{2019^2+2021^2}{2}\right)^2=\left(\frac{(2020-1)^2+(2020+1)^2}{2}\right)^2=\left(\frac{2020^2-4040+1+2020^2+4040+1}{2}\right)^2=$$

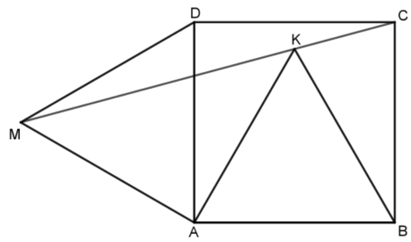
$$=(2020^2+1)^2=2020^4+2\cdot 2020^2+1=2020^4-2\cdot 2020^2+1+4\cdot 2020^2=$$

$$=(2020^2-1)^2+(2\cdot 2020)^2$$

5. $ABCD$ – квадрат. Треугольники AMD и AKB оба равносторонние (см. рисунок). Лежат ли точки C, M и K лежат на одной прямой?

Ответ: лежат.

Решение: Заметим, что $\angle MAD=\angle KAB=\angle KBA=\angle AKB=60°$, $\angle DAB=\angle CBA=90°$ и $MA=AD=AB=AK$, $BC=BA=BK$.



Вычислим углы равнобедренного треугольника MAK:

$\angle MAK=\angle MAD+\angle DAB-\angle KAB=90°$, $\angle AMK=\angle AKM=\frac{180°-90°}{2}=45°$.

Вычислим углы равнобедренного треугольника CBK:

$\angle KBC=\angle CBA-\angle KBA=30°$, $\angle BKC=\angle BCK=\frac{180°-30°}{2}=75°$.

$\angle MKC=\angle AKM+\angle AKB+\angle BKC=180°$, т.е. точки C, M и K лежат на одной прямой.

6. Сколькими способами можно заполнить таблицу 5×5 клеток нулями и единицами так, чтобы сумма чисел в каждой строке и в каждом столбце была четной?

Ответ: 2^{16}.

Решение: Заметим, что при любой расстановке нулей и единиц в четыре клетки строки, цифра, которую нужно поставить в пятую клетку, чтобы сумма чисел в этой строке была четной, определяется однозначно. Аналогичное утверждение верно и для столбца.

Заметим также, что суммы чисел в прямоугольниках 4x5 и 5x4 должны оказаться четными. У этих прямоугольников есть общая часть – квадрат 4x4, поэтому четность суммы четырех чисел в последней строке и четность суммы четырех чисел в последнем столбце одна и та же. Следовательно, число, которое нужно поставить в последней угловой клетке, определяется однозначно.

Таким образом, мы можем любым способом расставить нули и единицы в квадрате 4x4 и однозначно определить цифры в остальных клетках. Найдем, сколькими способами можно расставить нули и единицы в квадрате 4x4. В каждую из 16 клеток можно поставить либо нуль, либо единицу независимо от других клеток. Поэтому количество искомых способов расстановки будет равно $\underbrace{2\cdot 2\cdot \ldots\cdot 2}_{16}=2^{16}$.