## 8 класс. II тур. Вступительная олимпиада по математике.

1. Валера задумал натуральное число и прибавил к этому числу его сумму цифр. Леша также задумал число и тоже прибавил к нему его сумму цифр. В результате сложения у Валеры и у Леши получились одинаковые числа. Верно ли, что они задумывали одинаковые числа?

   **Ответ: Нет, не верно.**

   *Решение:* Например, Валера задумал 100, а Леша задумал 91:

$$100 + 1 = 91 + 9 + 1 = 101.$$

2. В классе учатся три девочки: Ира, Галя и Наташа. Одна из них самая умная, и она всегда говорит правду. Другая самая красивая, и она всегда лжет. А третья девочка самая хитрая: она иногда лжет, а иногда говорит правду. Ира сказала: “Я красивее Гали”. Галя сказала: ”Я умнее Наташи”. Наташа сказала: “Я хитрее Иры”. Какая из девочек самая красивая?

   **Ответ: Наташа.**

   *Решение:* Ира не может быть самой красивой, иначе ее фраза верная, а она обязана лгать. Значит, возможны два варианта: Ира самая умная или самая хитрая. Если Ира самая умная, то она сказала правду, и Галя не может быть самой красивой. Тогда самая красивая – Наташа. Если же Ира самая хитрая, то высказывание Наташи ложно, и Наташа может быть только самой красивой. Итак, в любом случае Наташа самая красивая.

3. Решите уравнение: $x^2 - 4x + 566 = \frac{1}{\left(\sqrt{3}-2\right)^2} - \frac{4}{2-\sqrt{3}} + 566.$

   **Ответ: $\mathbf{2+\sqrt{3}}$ и $\mathbf{2-\sqrt{3}}$.**

   *Решение:* Заметим, что одним из корней уравнения $x^2 - 4x + 566 - \left(\left(\frac{1}{2-\sqrt{3}}\right)^2 - 4\left(\frac{1}{2-\sqrt{3}}\right) + 566\right) = 0$ точно является число $\frac{1}{2-\sqrt{3}}$ (так как при подстановке этого числа получается верное равенство 0=0). Избавимся от иррациональности в знаменателе: $\frac{1}{2-\sqrt{3}} = \frac{2+\sqrt{3}}{2^2-\left(\sqrt{3}\right)^2} = 2+\sqrt{3}.$

   По обратной теореме Виета сумма корней этого уравнения равна 4, а значит второй корень:

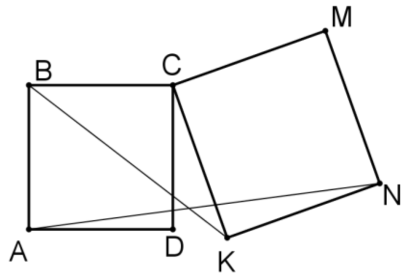
$$4 - \left(2+\sqrt{3}\right) = 2-\sqrt{3}.$$

4. У Маши, Ксюши, Насти и Лизы в совокупности 100 леденцов. У каждых двух девочек не менее 41 леденца. Какое наименьшее количество леденцов может быть у Лизы?

   **Ответ: 12.**

   *Решение:* Предположим, что количество конфет у девочек - $a, b, c$ и $d$, причем $a \le b \le c \le d$. По условию $\begin{cases} a+b \ge 41, \\ a+c \ge 41, \\ a+d \ge 41. \end{cases}$ Сложим все три неравенства: $3a+b+c+d \ge 123$, но $a+b+c+d = 100$, а значит $2a \ge 23$. Поскольку число $a$ – целое, то наименьшее возможное значение $a = 12$. Покажем, что при таком $a$ выполняются все условия: пусть у Лизы – 12 конфет, у Насти и Ксюши по 29 конфет, а у Маши – 30 конфет. Тогда $12+29 = 41,\ 12+30 > 41,\ 29+29 > 41,\ 29+30 > 41,\ 12+29+29+30 = 100.$

5. Два квадрата $ABCD$ и $CMNK$ имеют общую вершину. а) Докажите, что $\angle ACN = \angle BCK$. б) Найдите отношение отрезков $AN$ и $BK$.




**Ответ: б) $\frac{AN}{BK} = \sqrt{2}$.**

*Решение:* а) $\angle ACN = \angle ACD + \angle DCK + \angle KCN = 45° + \angle DCK + 45° = 90° + \angle DCK$.

$\angle BCK = \angle BCD + \angle DCK = 90° + \angle DCK$. **Что и требовалось доказать.**

б) Рассмотрим треугольники $ACN$ и $BCK$. Из пункта а) известно, что $\angle ACN = \angle BCK$, кроме того $AC$ и $CN$ диагонали квадратов со сторонами $BC$ и $CK$ соответственно, а значит $\frac{AC}{BC} = \frac{CN}{CK} = \sqrt{2}$. Таким образом, треугольники $ACN$ и $BCK$ подобны по второму признаку, и коэффициент подобия равен $\sqrt{2}$. Но тогда третьи стороны этих треугольников – $AN$ и $BK$ – тоже относятся как $\sqrt{2}$.

6. Сумма корней квадратного уравнения на единицу больше произведения его корней, при этом один из корней на 2 больше другого. Найдите эти корни.

**Ответ: 1 и 3 или -1 и 1.**

*Решение:* Пусть корни этого уравнения $p$ и $p+2$. Их сумма равна $2p+2$, а произведение $p(p+2) =$ $= p^2 + 2p$. Получаем уравнение:

$$p^2 + 2p + 1 = 2p + 2 \Leftrightarrow p^2 = 1 \Leftrightarrow p = \pm 1.$$

Если $p = 1$, то корни 1 и 3, если $p = -1$, то корни $-1$ и 1.